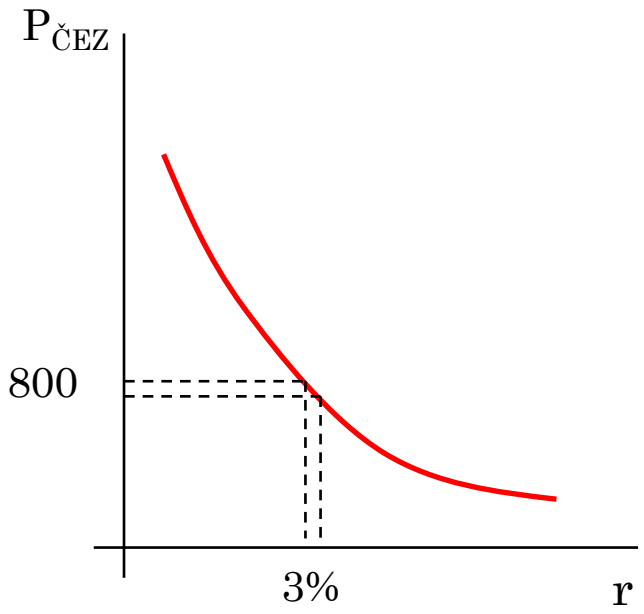
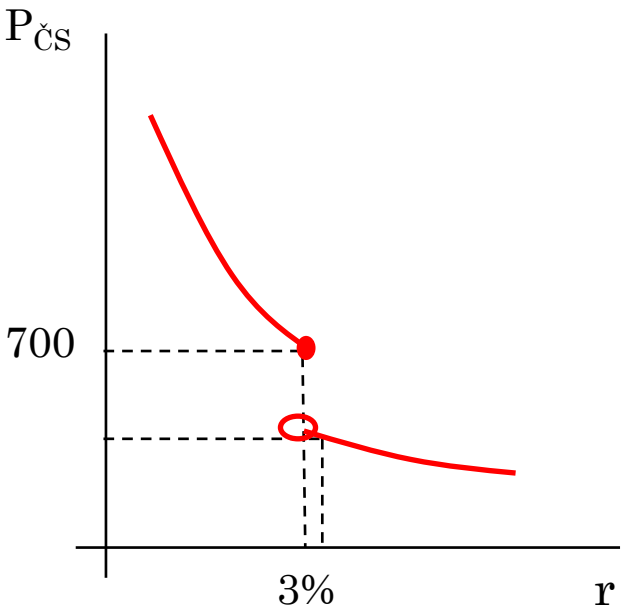
Spojitost funkce – příklad

Cena akcie ($P_{ČEZ}$) bude záviset na velikosti úrokové míry (r)
Pokud dojde k malé změně (růstu)v úrokové míře o 0,01% bodu
Co se stane s $P_{ČEZ}$?
Dojde k velmi malé změně ceny

Cena akcie ($P_{ČS}$) bude záviset na velikosti úrokové míry (r)
Pokud dojde k malé změně(růstu) v úrokové míře o 0,01% bodu
Co se stane s $P_{ČEZ}$?
Dojde ke skokové změně ceny

EKOFUN

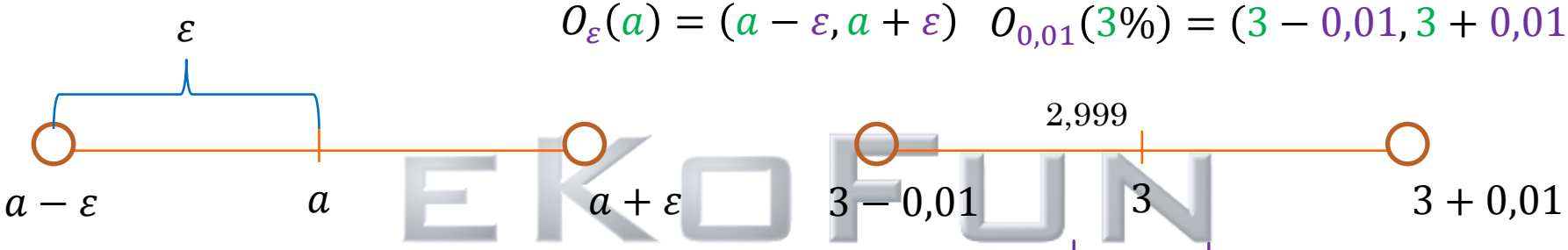




Okolí

Mějme $a \in R$ a $\varepsilon > 0$
Otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-ovým okolím** bodu (a) a značíme

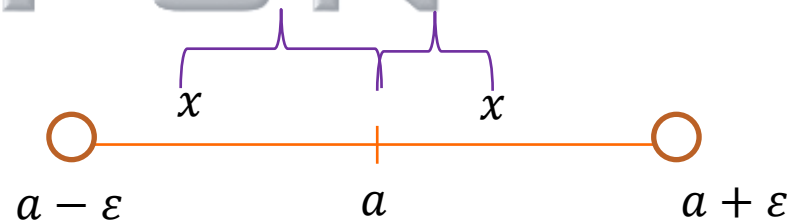
$$O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad O_{0,01}(3\%) = (3 - 0{,}01, 3 + 0{,}01)$$



EKOFUN

$$x \in O_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

$$2{,}999 \in O_{0,01}(3) \Leftrightarrow |2{,}999 - 3| < 0{,}01$$



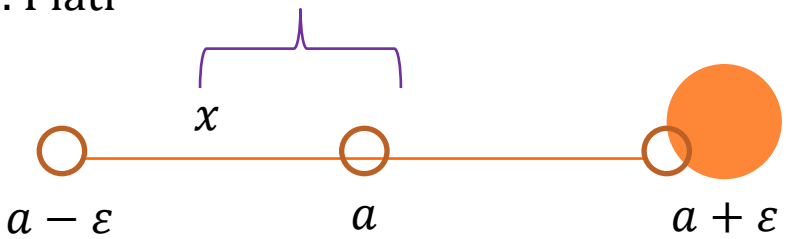
Množinu

$$P_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

Nazýváme **ε-ovým prstencovým okolím** bodu (a). Platí

$$x \in P_\varepsilon(a) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \varepsilon$$

$$3 \in P_{0,01}(3) \Leftrightarrow 0 < |3 - 3| < 0{,}01$$



Interval

$$\langle a, a+\varepsilon) = O_{\varepsilon}^{+}(a)$$

Nazýváme pravým ε-ovým okolím bodu (a)

$$(a-\varepsilon, a\rangle = O_{\varepsilon}^{-}(a)$$

Nazýváme levým ε-ovým okolím bodu (a)

EKOFUN

$$(a, a+\varepsilon) = P_{\varepsilon}^{+}(a)$$

Pravé prstencové okolí bodu (a)

$$(a-\varepsilon, a) = P_{\varepsilon}^{-}(a)$$

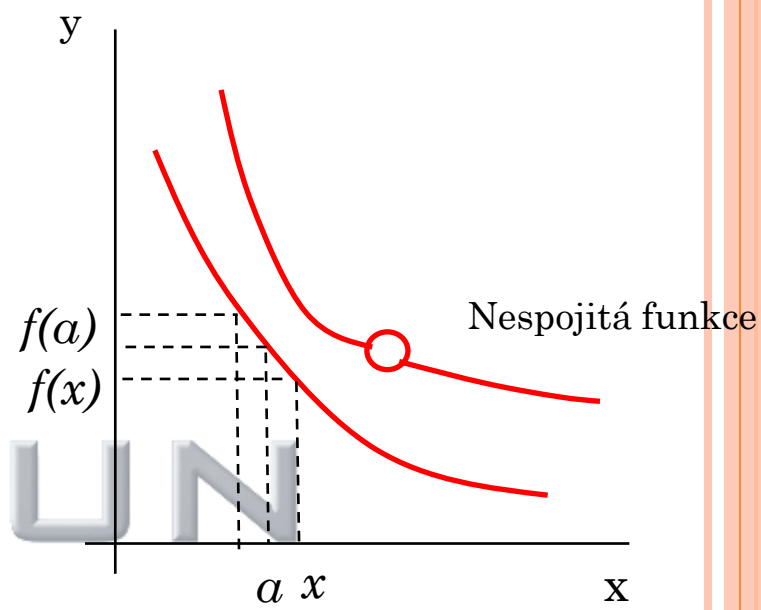
Levé prstencové okolí bodu (a)

Spojitost funkce

„graf lze nakreslit jedním tahem“

Nejsou skokové změny

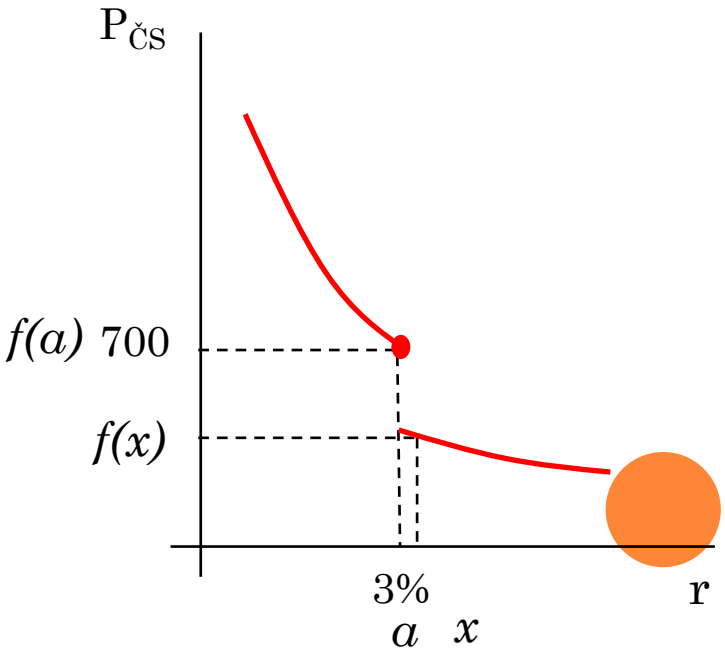
Jeli x blízko bodu a
Pak $f(x)$ je blízko $f(a)$



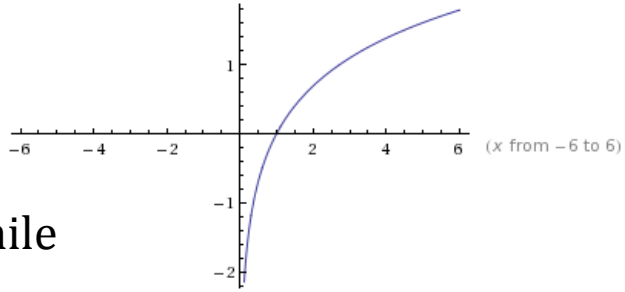
EKOFUN

Definice:
Budiž funkce f definována v jistém okolí $O(a)$
Říkáme, že funkce je spojitá v bodě $a \in D(f)$
Jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\sigma>0$
Takové, že jakmile

$$|x-a| < \sigma \quad \text{pak} \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$



Definice:
Budiž funkce f definována v jistém okolí O(a)
Říkáme, že funkce je spojitá v bodě $a \in D(f)$
Jestliže ke každému ε>0 existuje σ>0 takové, že jakmile

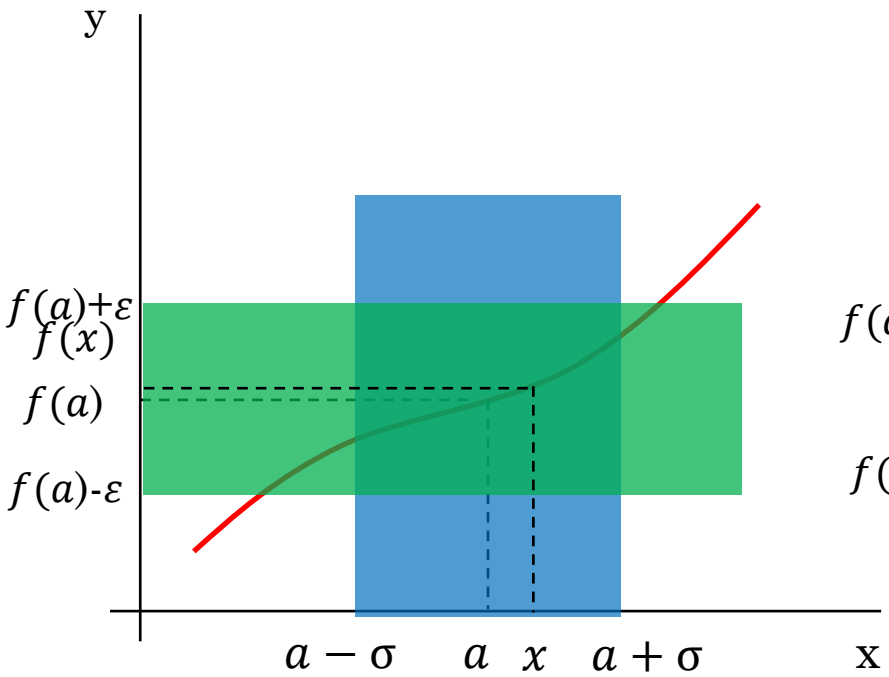


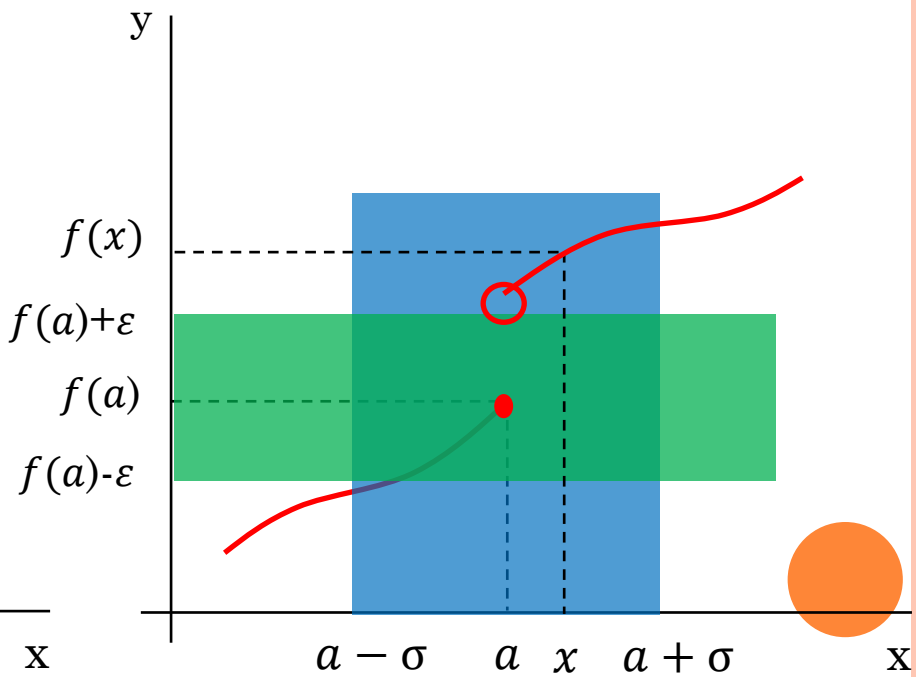
$$|x-a| < \sigma \quad \text{pak} \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon \qquad \textit{spojitý na } (0,+\infty)$$

Definice:

Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a,b),
je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu

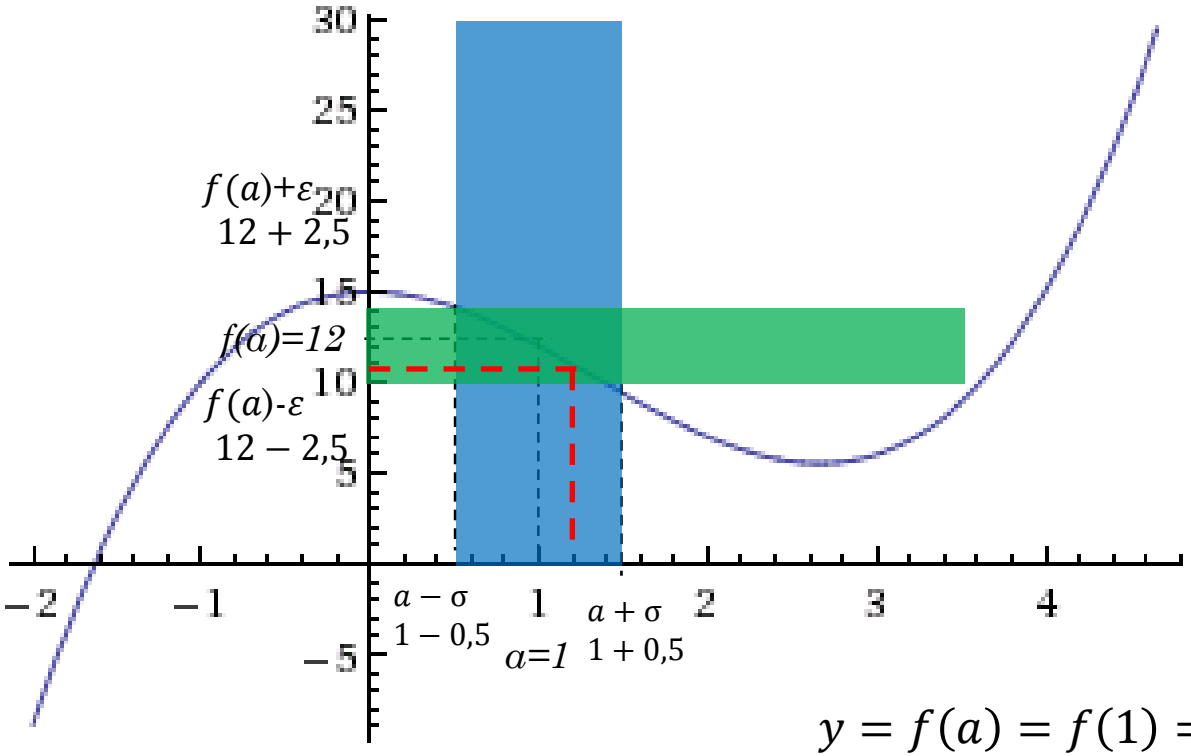
EKUFUN





Definice:
Budiž funkce f definována v jistém okolí O(a)
Říkáme, že funkce je spojitá v bodě $a \in D(f)$
Jestliže ke každému ε>0 existuje σ>0 takové, že jakmile

$$|x - a| < \sigma \quad \text{pak} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



$$y = x^3 - 4x^2 + 15$$

σ=0,5
ε=2,5

x=1,2
(x from −2 to 4)

$$y = f(a) = f(1) = 1^3 - 4.1^2 + 15 = 12$$

$$y = f(1{,}2) = 1{,}2^3 - 4.1{,}2^2 + 15 = 10{,}968$$

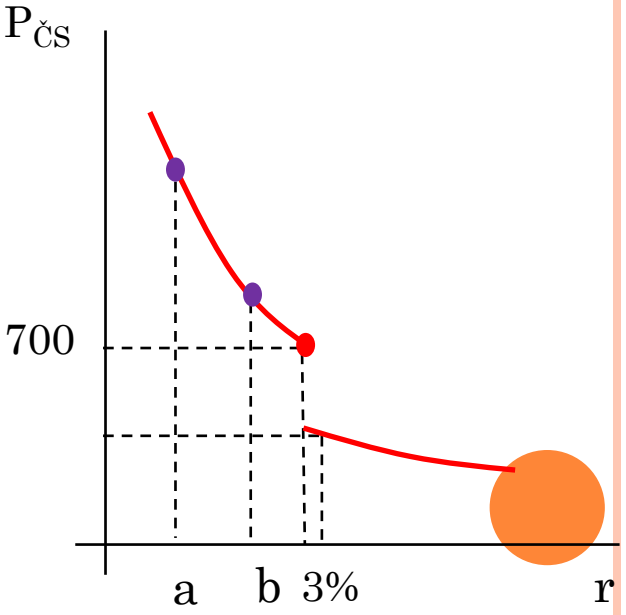
Spojitost zleva/zprava

Definice:
Říkáme, že funkce je spojitá zprava v bodě $a \in D(f)$
Jestliže ke každému okolí

Věta:
Funkce f je spojitá v bodě a právě když je v bodě a spojitá zleva i zprava

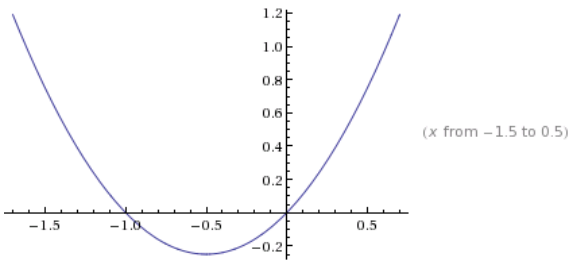
EKOFUN

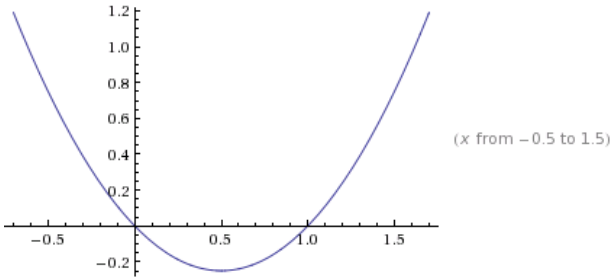
Věta (Weierstrassova):
Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$
Má v tomto intervalu maximum i minimum
(důležité u vyšetřování funkcí)

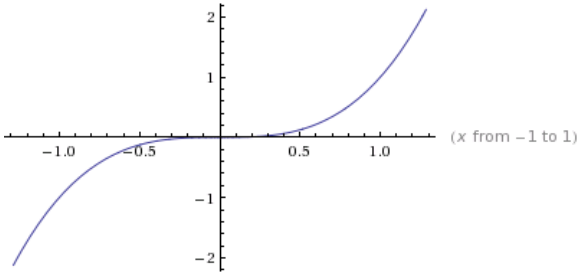


Věta:
Jsou-li funkce *f,g,* spojité v bodě a
pak jsou v tomto bodě spojité i funkce
f+g, f-g, f.g, f/g pro $g(a) \neq 0$

$$f: y = x^2 \qquad g: y = x \qquad a = 1$$







Věta:
Je-li funkce $y=f(x)$ spojitá v bodě $x=a$
A funkce $z=g(y)$ spojitá v bodě $y=f(a)$
Pak složená funkce $h(x)=g(f(x))$ je spojitá v bodě $x=a$

$$y = f(x) = 1 + 2x$$

$$y = f(5) = 1 + 2.5 = 11$$

$$z = g(y) = \ln(y) = \ln(1 + 2x)$$

$$y = f(a) = f(5) = 11$$

$$z = g(11) = ln11$$

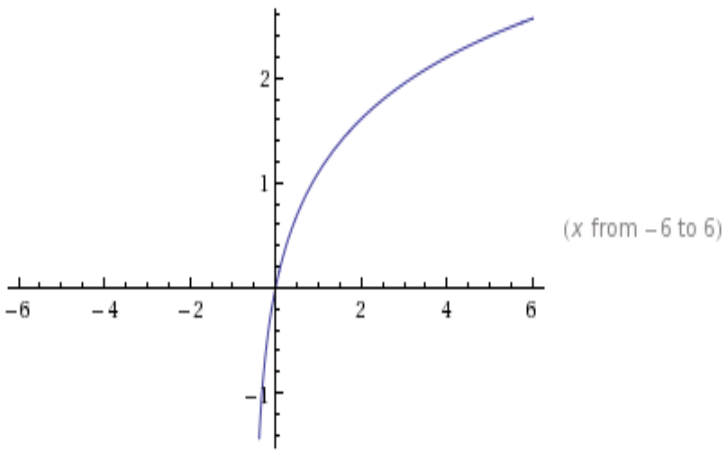
$$f(x) = \ln(1 + 2x) \qquad a = 5$$

$$(1 + 2x) > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = \ln(1 + 2x) - \text{spojitá na x} = 5$$

EKOFUN



$$z = lny - je\ spojitá\ na\ svém\ D(f)$$

$$D(f) = (0, +\infty)$$

$$y = 1 + 2x - je\ spojitá\ na\ svém\ D(f)$$

$$D(f) = R$$

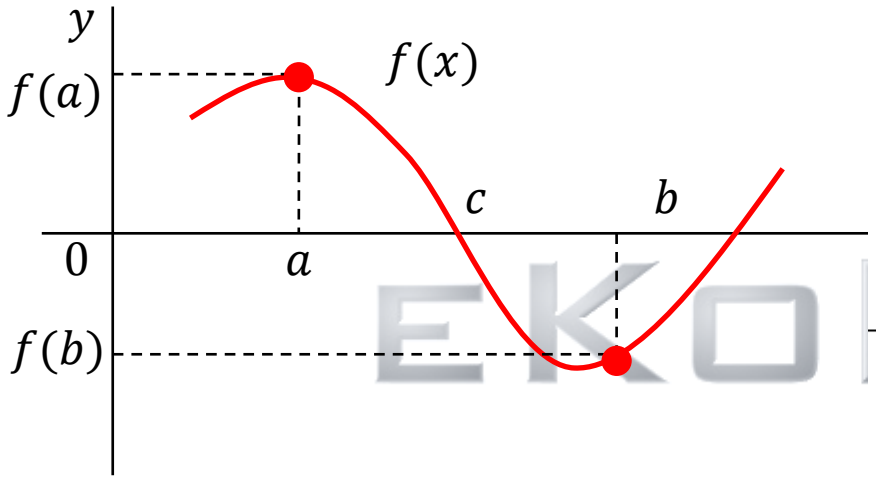
$$f(x) = \ln(1 + 2x) - je\ spojitá\ na\ svém\ D(f)$$

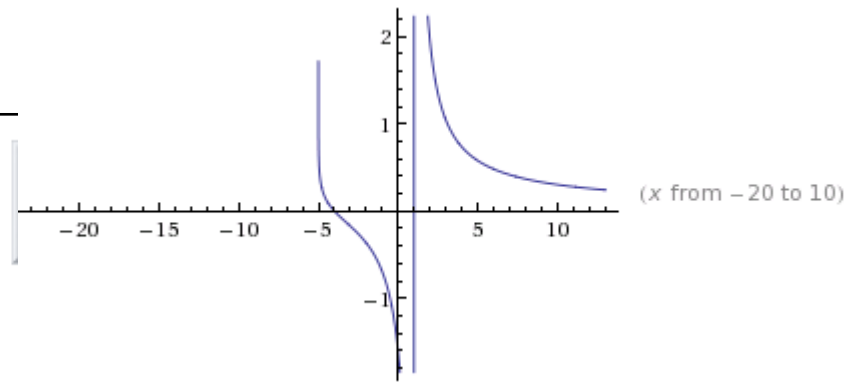
$$D(f) = (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

Věta (Bolzanova)

Je-li funkce f v intervalu $< a, b >$ a $f(a).f(b) < 0$

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$





Díky této větě jsme schopni řešit nerovnice *f(x)>0, f(x)<0, f(x)≥0 f(x)≤0*

f je elementární funkce

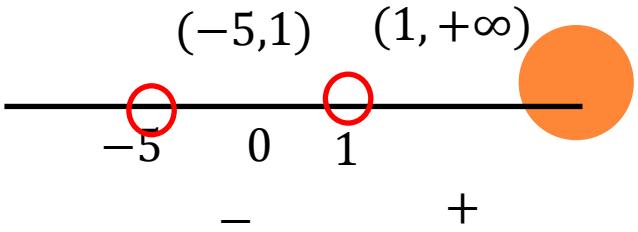
1) Zjistíme D*(f)*
2) Najdeme kořeny rovnice *f(x)=0* – nulové body
3) Nulové body rozdělí *D(f)* na intervaly
4) Stačí zjistit znaménko libovolného vnitřního bodu intervalu a známe znaménka v celém intervalu

$$y = \frac{\ln(x+5)}{x-1} \quad \begin{matrix} > 0 \\ \neq 0 \end{matrix}$$

$x + 5 = 0$ $\quad$ $x - 1 = 0$

$x = -5$ $\quad$ $x = 1$

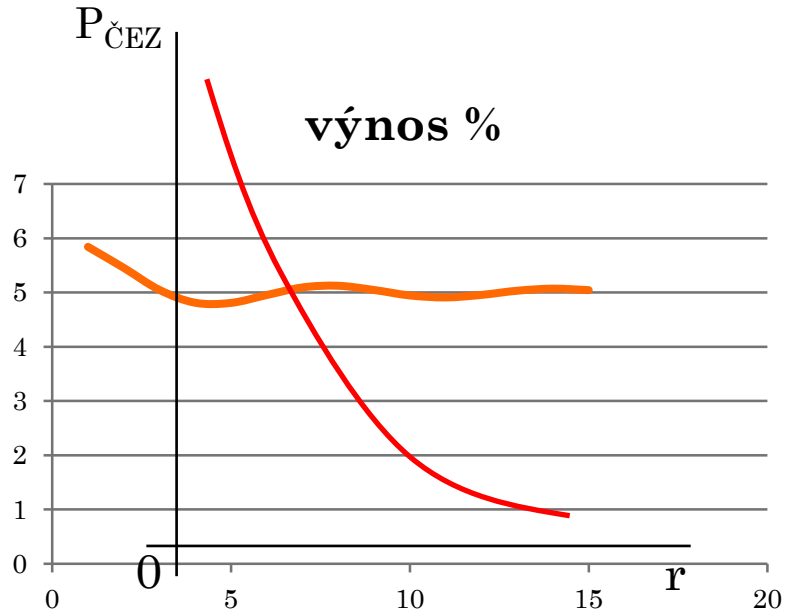
$x > -5$ $\quad$ $x \neq 1$

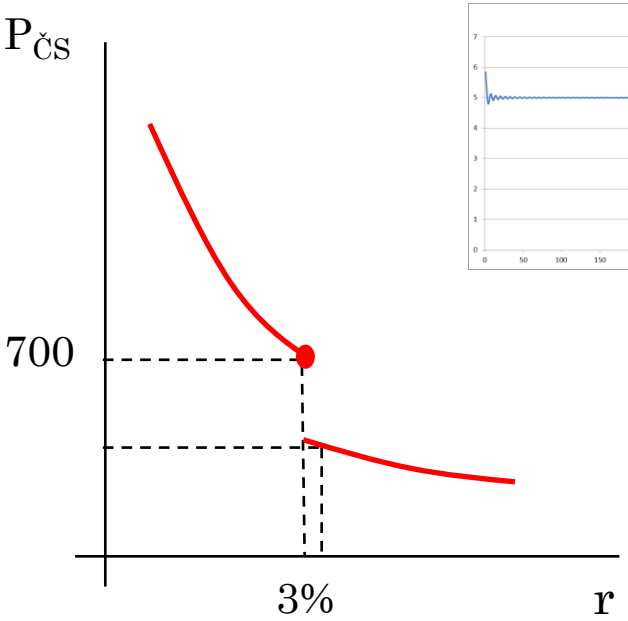


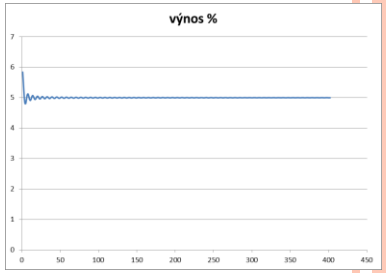
Limita funkce

Výnos ceny akcie můžeme popsat funkcí $V = \frac{sint}{t} + 5$

O chování funkce v okolí bodů, v nichž není funkce definována nebo je definována, ale není spojitá
Nás informuje limita funkce v těchto bodech







Často potřebujeme zjistit jak se chová určitá funkce v okolí určitých bodů
Někdy funkce není definována v daných bodech
Nebo je definována, ale není spojitá
O chování funkce v daném bodě nás informuje limita funkce v daném bodě
Pokud existuje

Definice:
Budiž funkce f definována v jistém prstencovém okolí bodu a
(v bodě a může, ale nemusí být definována)
Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $L \in R$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

EKOFUN

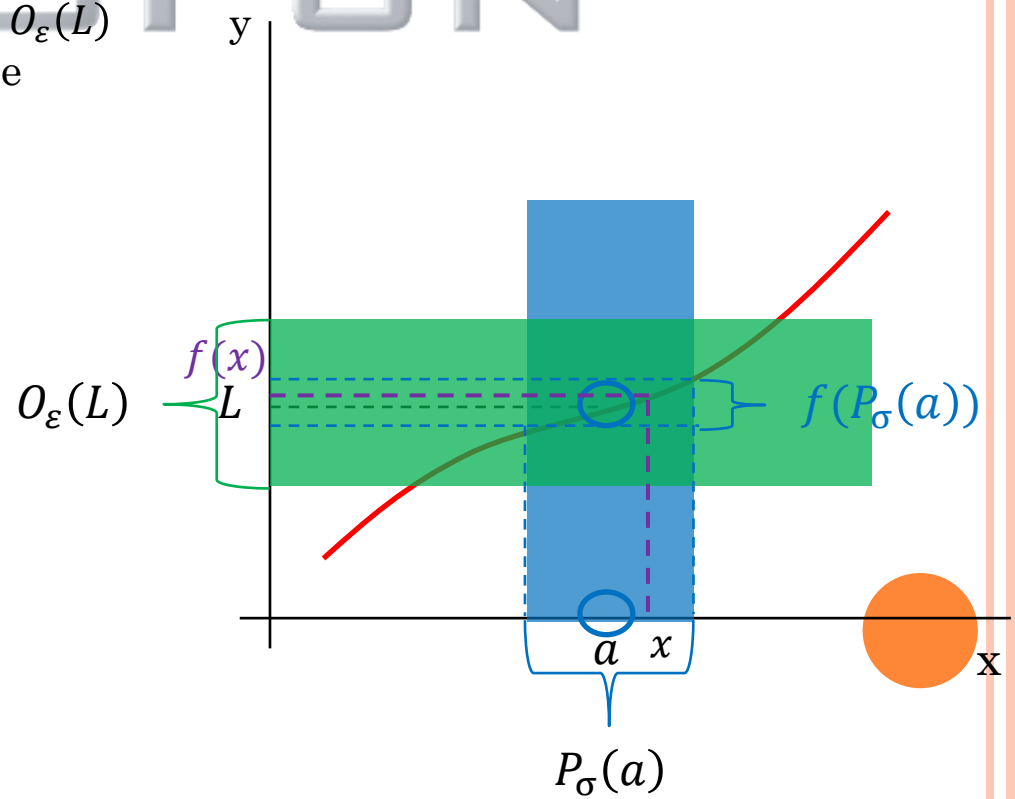
Jestliže ke každému (libovolně malému) $O_\varepsilon(L)$
Existuje prstencové okolí $P_\sigma(a)$ takové, že

$$x \in P_\sigma(a) \quad \text{pak} \quad f(x) \in O_\varepsilon(L)$$

$$f(P_\sigma(a)) \subset O_\varepsilon(L)$$

Obraz prstencového okolí
Leží v ε-ovém okolí bodu L

$$0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Definice:
Budiž funkce f definována v jistém prstencovém okolí bodu a
(v bodě a může, ale nemusí být definována)
Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu $L \in R$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 0} (x^3 + x + 1) = L$$

$$a = 0 \; f(a) = L = 1$$

Jestliže ke každému (libovolně malému) $O_\varepsilon(L)$
Existuje prstencové okolí $P_\sigma(a)$ takové, že

$$x \in P_\sigma(a) \quad \text{pak} \quad f(x) \in O_\varepsilon(L)$$

EKOFUN

Obraz prstencového okolí
Leží v ε-ovém okolí bodu L

$$f(P_\sigma(a)) \subset O_\varepsilon(L)$$

$$f(P_{0,2}(0)) \subset O_{0,5}(1)$$

$$0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$y = x^3 + x + 1$$

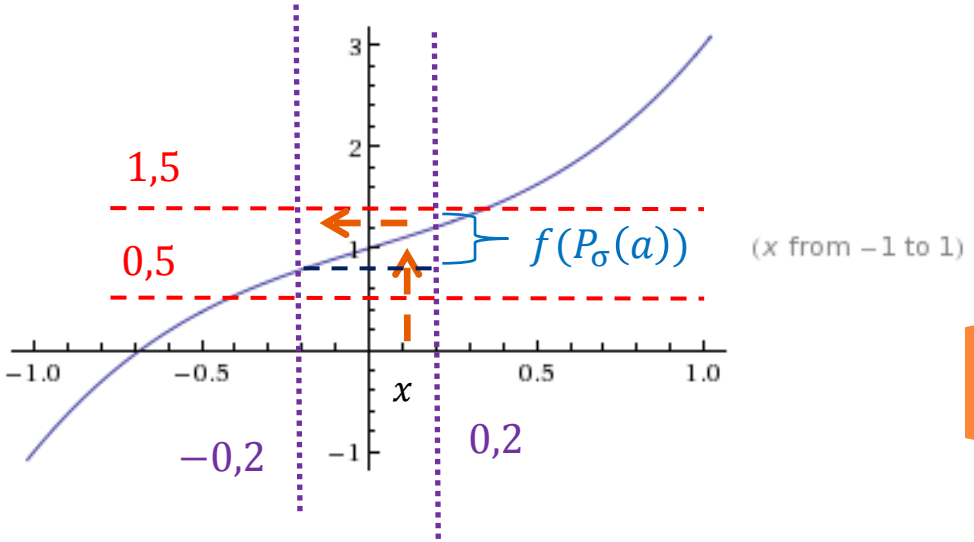
$$\varepsilon = 0{,}5 \; a = 0 \; \sigma = 0{,}2$$

$$O_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$$O_{0,5}(1) = (1 - 0{,}5, 1 + 0{,}5)$$

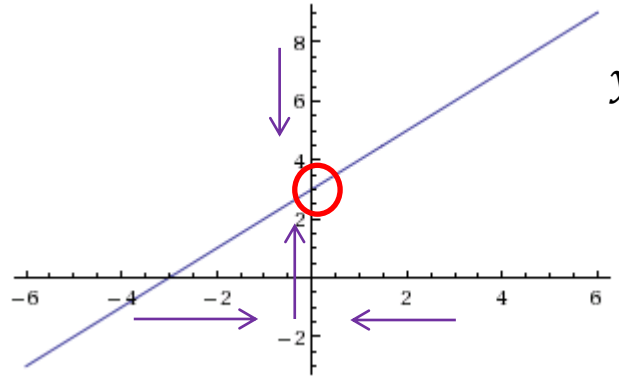
$$P_\sigma(a) = (a - \sigma, a + \sigma)$$

$$P_{0,2}(0) = (0 - 0{,}2, 0 + 0{,}2)$$



Věta:
Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

„buď nemá žádnou a nebo jen jednu“



$$y = \frac{1}{\frac{1}{x}} + 3$$

(x from −6 to 6)

Věta:
Funkce f je spojitá v bodě x=a právě tehdy, když

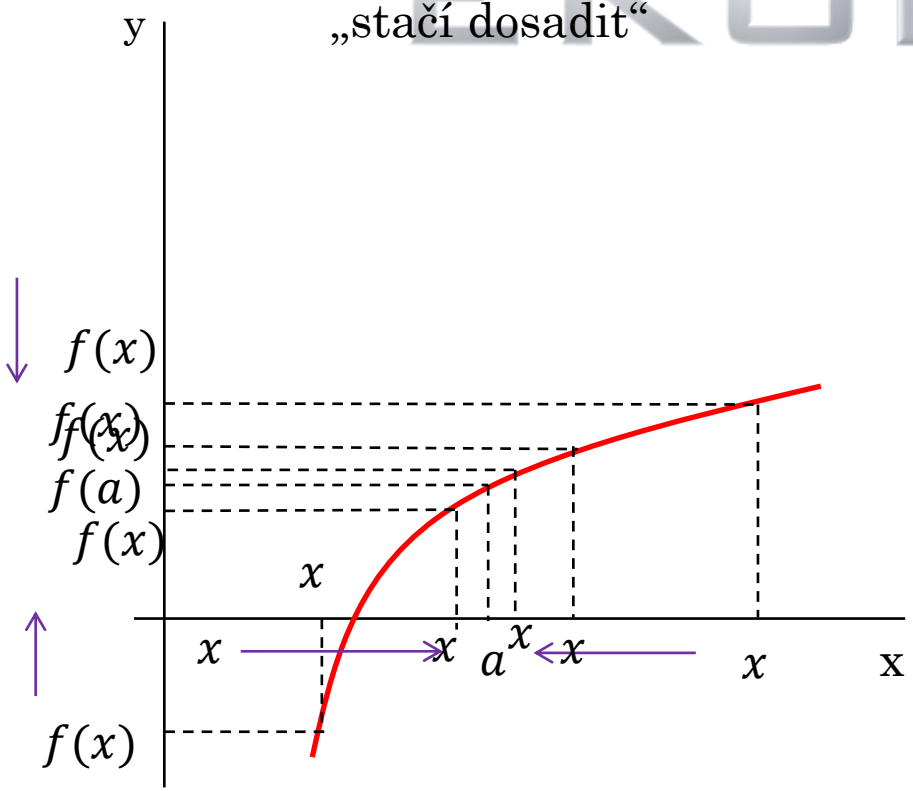
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

„stačí dosadit“

$$\lim_{x \to 0} = \frac{1}{\frac{1}{x}} + 3 =$$

f(0) neexistuje

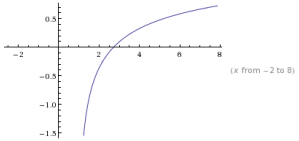
EKOFUN



$$\lim_{x \to 2} lnx = f(2) = 0{,}693$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = ?$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$



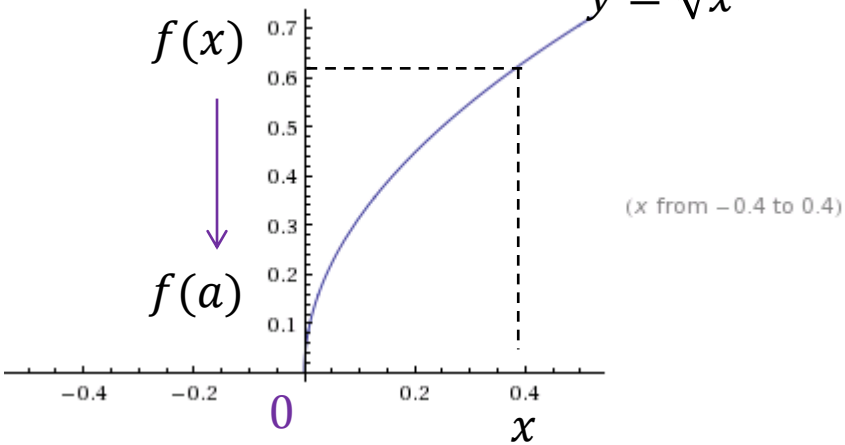
$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = \sqrt{x}$$

$f(x)$

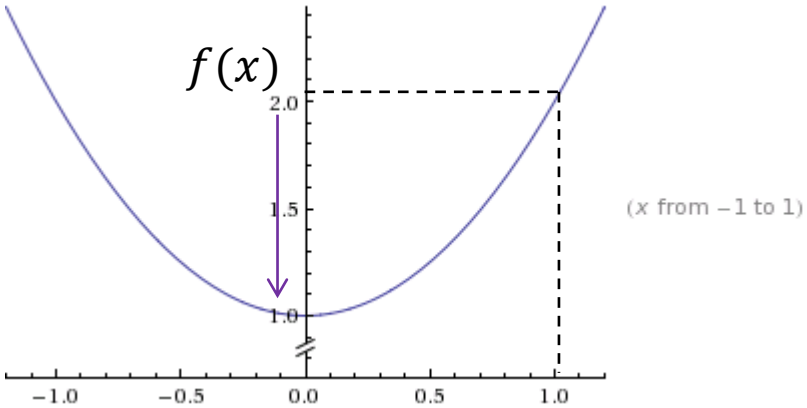
$f(a)$



0

x

a



$f(x)$

0

x

$$y = \ln(lnx)$$

EKOFUN

$$\lim_{x\to 0} (x^2 + 1) = ?$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2 + 1) = 1$$

Věta:
Je-li funkce *y=f(x)* spojitá v bodě *x=a*
A funkce *z=g(y)* spojitá v bodě *y=f(a)*
Pak složená funkce *h(x)=g(f(x))* je spojitá v bodě *x=a*

$$\lim_{x\to 5} \ln(lnx) = ?$$

$$\lim_{x\to 5} \ln(lnx) = 0{,}4758$$

- ✓ *lnx* spojitá v 5
- ✓ *lny* spojitá v *ln5=1,609*
- ✓ *ln(lnx)* spojitá v *x=5*

Platí pouze pokud je v daném bodě spojitá!!!

Věta:

Mějme dány dvě funkce f a g a bod x_0.

Existuje-li $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$je $f(x) = g(x)$pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Pokud alespoň jedna limita existuje.

Česky:

Často máme nějakou funkci $\frac{x^2-16}{x-4}$, která není definována v nějakém bodě $x_0 = 4$

My pak hledáme nějakou jinou funkci g

Která bude v daném bodě spojitá (4)

A v jistém prstencovém okolí P(4) bude platit rovnost funkčních hodnot

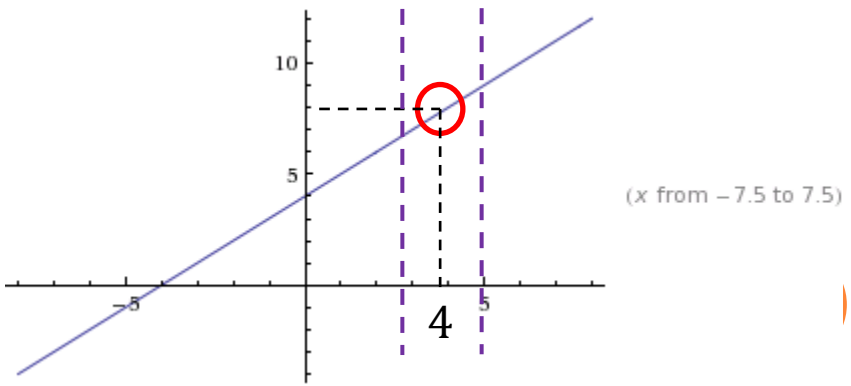
Pak limita z pro *f(x)* je rovna funkční hodnotě v bodě x_0 (4) – prostě už jen dosadíme do rovnice

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} g(x) = g(4)$$

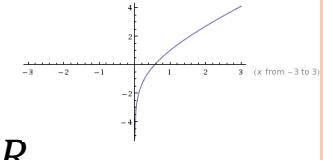
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4).(x+4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad f(x) v\ x = a\ spojitá!!!$$



Věta:

Nechť

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B \qquad A, B \in R$$

Pak platí

a)

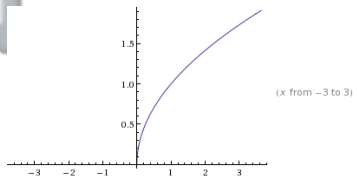
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to 1} (lnx + x) = \lim_{x \to 1} lnx \pm \lim_{x \to 1} x = 0 \pm 1$$

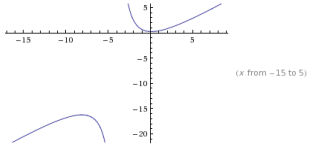
EKOFUN

b)

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) . \lim_{x \to x_0} g(x) = A.B$$



$$\lim_{x \to 1} (\sqrt{x}.x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} . \lim_{x \to 1} x = 1.1$$



c)

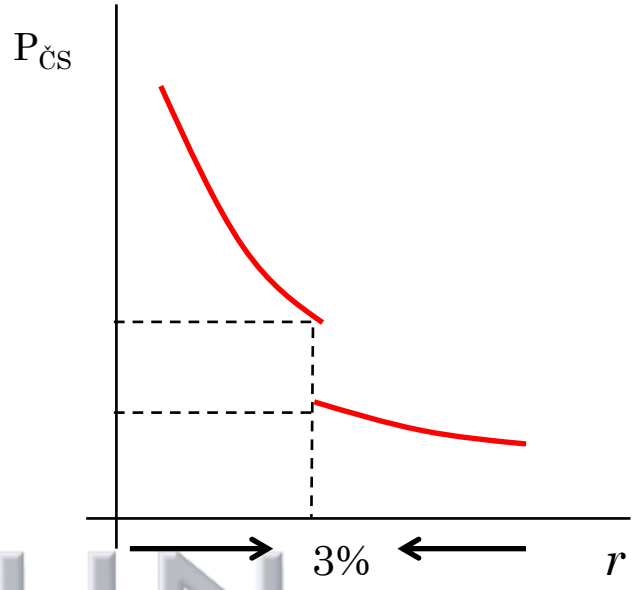
Je-li B≠0, pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1}{x + 4} = \frac{\lim_{x \to 0} (x^2 + 1)}{\lim_{x \to 0} g(x + 4)} = \frac{1}{4}$$

Jednostranné limity

Uvedená funkce *f* nemá v bodě *x=3* limitu



Definice:
Budiž funkce *f* definována v jistém prstencovém okolí bodu *a*
(v bodě *a* může, ale nemusí být definována)
Říkáme, že funkce *f* má v bodě *a* limitu $L \in R$

Jestliže ke každému (libovolně malému) $O_\varepsilon(L)$
Existuje prstencové okolí $P_\sigma(a)$ takové, že
$f(P_\sigma(a)) \subset O_\varepsilon(L)$

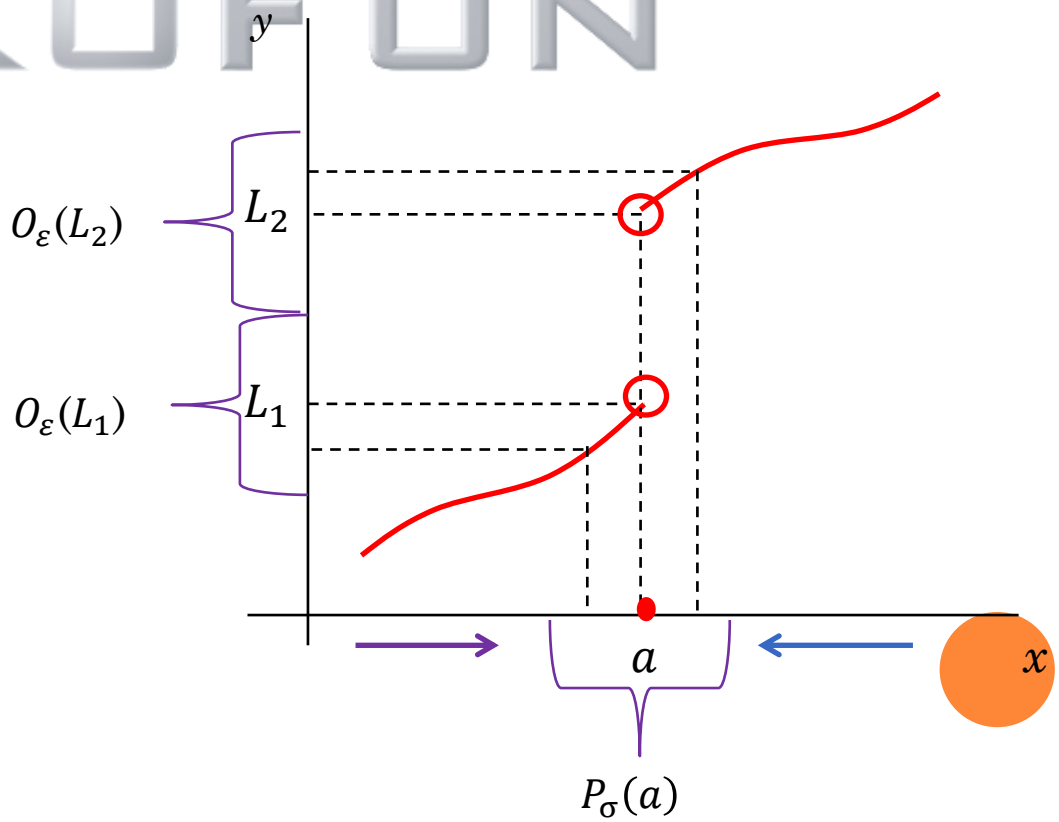
EKOFUN

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L_1$$

Limita funkce *f* v bodě *a* zleva je rovna číslu L_1

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L_2$$

Limita funkce *f* v bodě *a* zprava je rovna číslu L_2



Jednostranné limity

Věta:
Funkce *f* je spojitá v bodě *a zprava (resp. zleva)* právě tehdy, když: $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$

Definice:

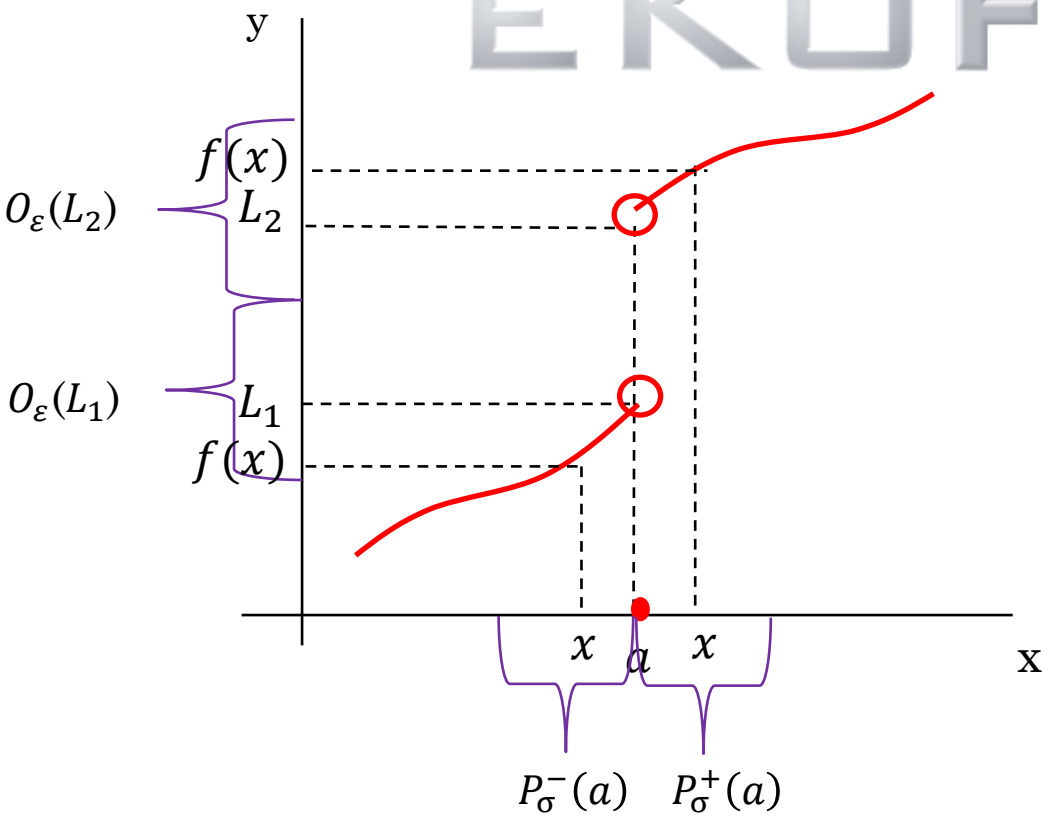
Říkáme, že funkce *f* je spojitá *zprava*, (resp. *zleva*) v bodě $a \in D(f)$
Jestliže ke každému okolí $O_\varepsilon(f(a))$
Existuje okolí $O_\sigma^+(a)$ (resp. $O_\sigma^-(a)$) pro než platí

$$f(O_\sigma^+(a)) \subset O_\varepsilon(f(a))$$

resp.

$$f(O_\sigma^-(a)) \subset O_\varepsilon(f(a))$$

EKOFUN



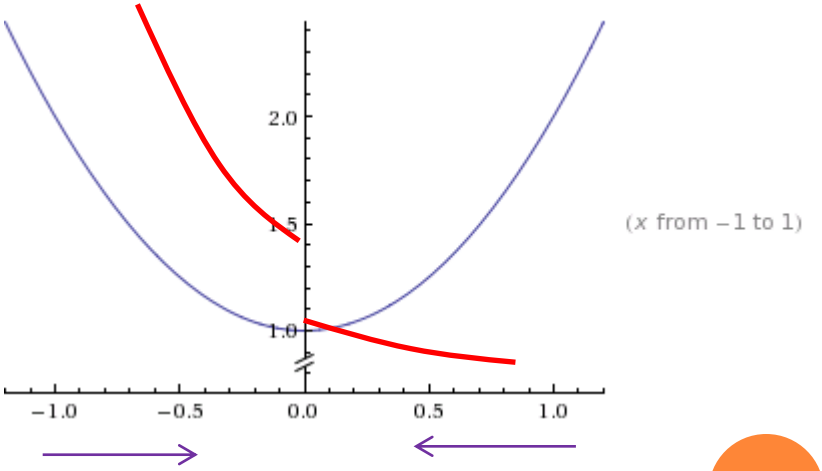
Věta:
Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existuje právě tehdy,
jestliže existují jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L_2$
a jsou si rovny

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

EKOFUN

$$\lim_{x\to 0}(x^2+1) = \lim_{x\to 0-}(x^2+1) = \lim_{x\to 0+}(x^2+1) = 1$$

$y = x^2 + 1$



Věta:
Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$
právě tehdy, když:

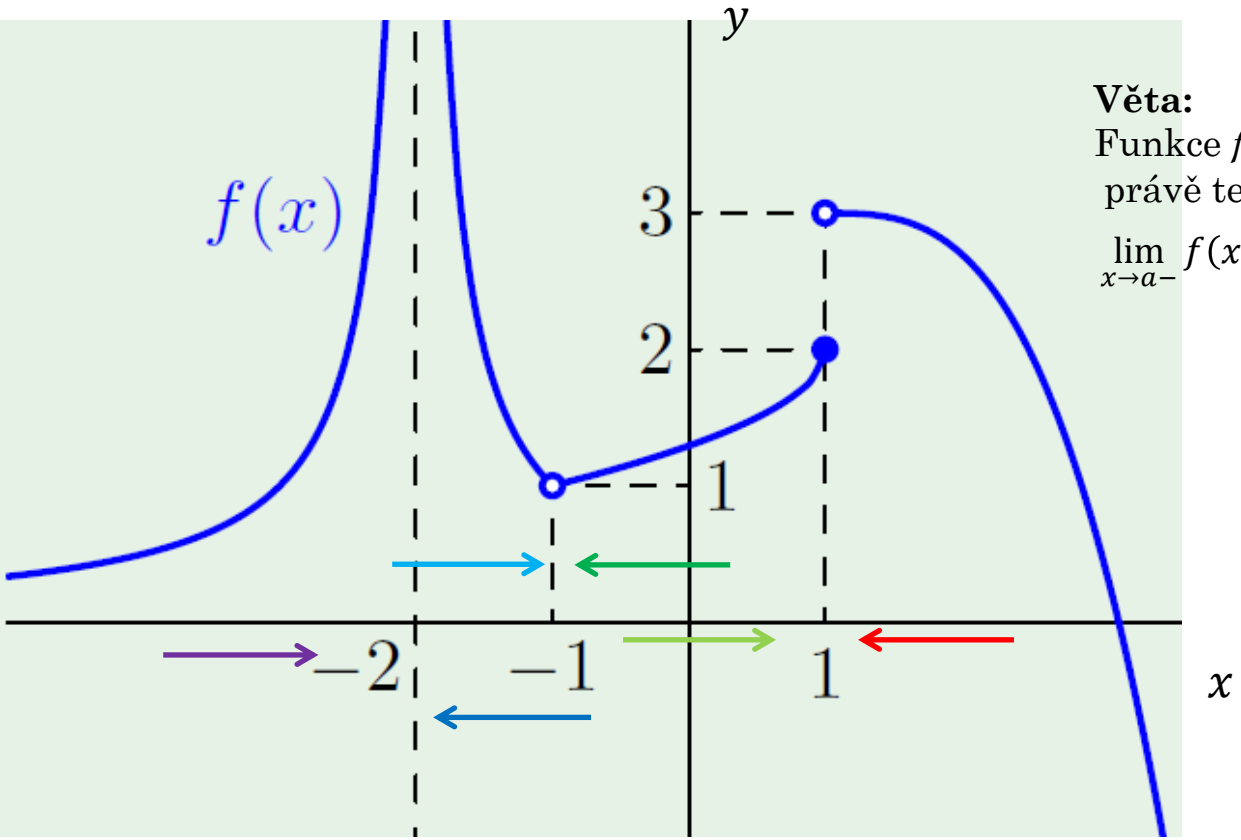
$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$$

$D(f) = R - \{-2, -1\}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1} f(x) = neexistuje$



Věta:
Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$ právě tehdy, když:

$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$

Nevlastní limity

Úmluva: $-\infty, +\infty$ nazýváme nevlastní reálná čísla

Limita (L)
funkce f
V bodě a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

bod

„limita“

EKOFUN

I. $a \in R, L \in R$, jedná se o **vlastní limitu** ($L \in R$) ve **vlastním bodě** ($a \in R$)
II. $a \in R, L = \pm\infty$, jedná se o **nevlastní limitu** ($L = \pm\infty$) ve **vlastním bodě** ($a \in R$)
III. $a = \pm\infty, L = R$, jedná se o **vlastní limitu** ($L = R$) v **nevlastním bodě** ($a \pm \infty$)
IV. $a = \pm\infty, L = \pm\infty$, jedná se o **nevlastní limitu** ($L = \pm\infty$) v **nevlastním bodě** ($a \pm \infty$)

Nevlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to a} f(x) = L$

a $\in R, L = \pm\infty$, jedná se o **nevlastní limitu** ($L = \pm\infty$) ve **vlastním bodě** ($a \in R$)

Definice:

Budiž funkce *f* definována v jistém prstenovém okolí bodu $a \in R$

Říkáme, že funkce *f* má v bodě *a* nevlastní limitu $+\infty$ $- \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Jestliže ke každému číslu *K>0* (libovolně velkému)

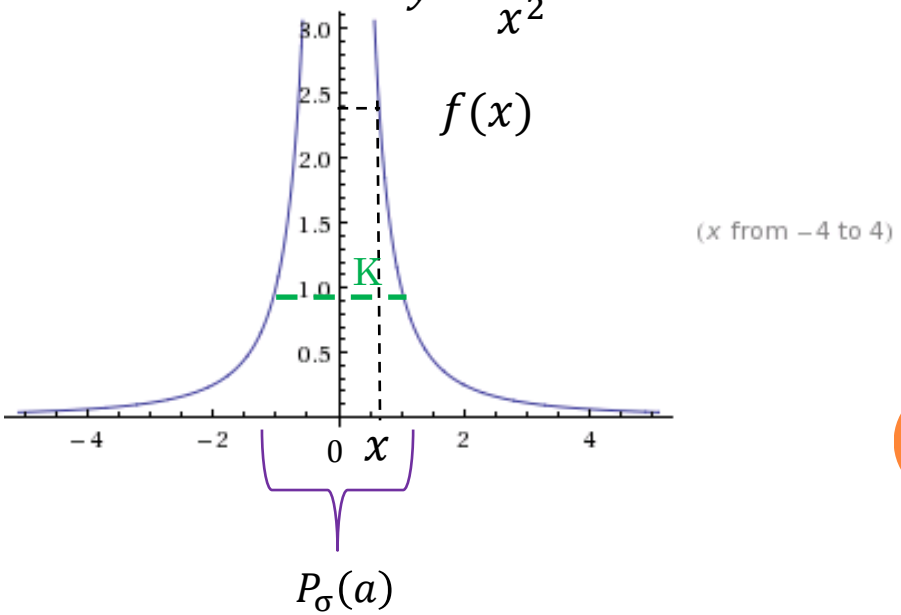
Existuje $P_\sigma(a)$ takové, že pro všechna $x \in P_\sigma(a)$ je *f(x)>K*

EKOFUN

„roste v okolí bodu a nade všechny meze“

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$



Věta:

Budiž funkce *f* omezená na jistém *P(a)* tj. $|f(x)| < H$ pro všechna $x \in P(a)$

Pak platí:

$$(i)\ Je - li\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \qquad pak\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

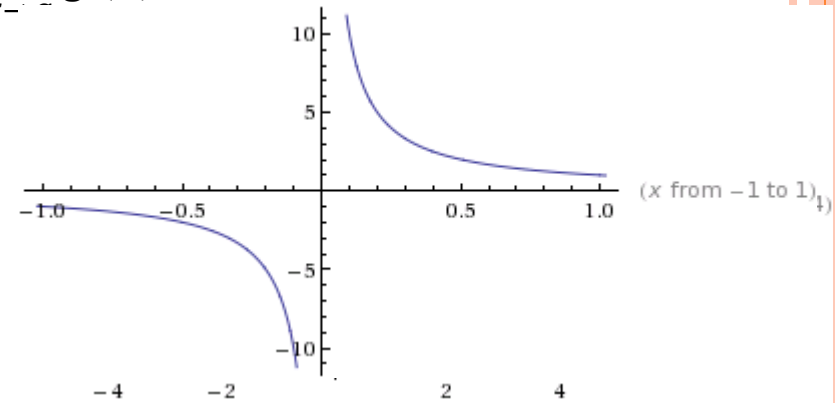
$$(ii)\ Je - li\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad pak\ \lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} cosx.x^2 = 0$$

EKOFUN

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \qquad \lim_{x\to} g(x) = 0$$



a) Jestliže *g(x)>0* na nějakém *P(a)*, pak

b) Jestliže *g(x)<0* na nějakém *P(a)*, pak

c) Jestliže na každém *P(a)*, nabývá *g(x)* kladných i záporných hodnot, pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\ neexistuje \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\frac{1}{x}}\ neexistuje$$

Vlastní limita v nevlastním bodě

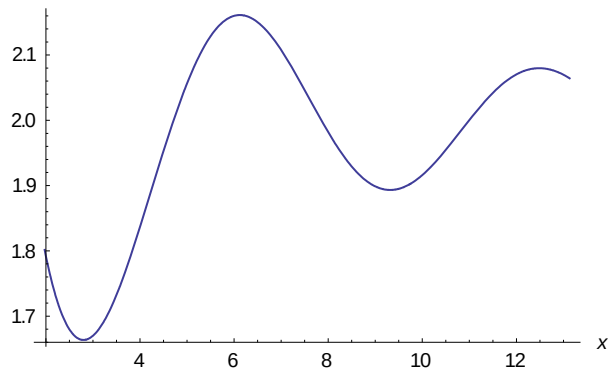
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

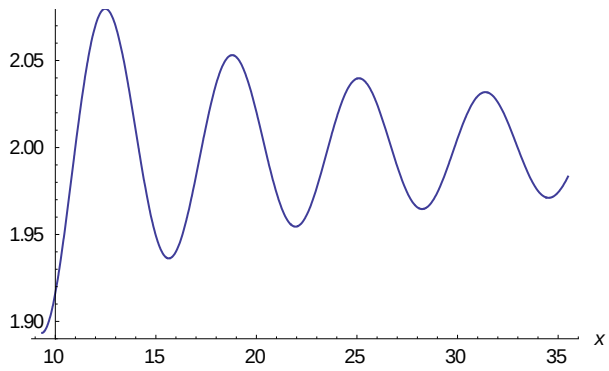
a $= \pm\infty, L = R$, jedná se o **vlastní limitu** $(L = R)$ v **nevlastním bodě** $(a \pm \infty)$

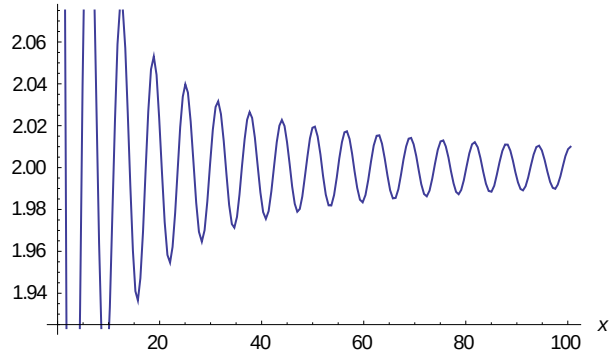
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$$

EKOFUN

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x} + 2 = 2$$







Definice:

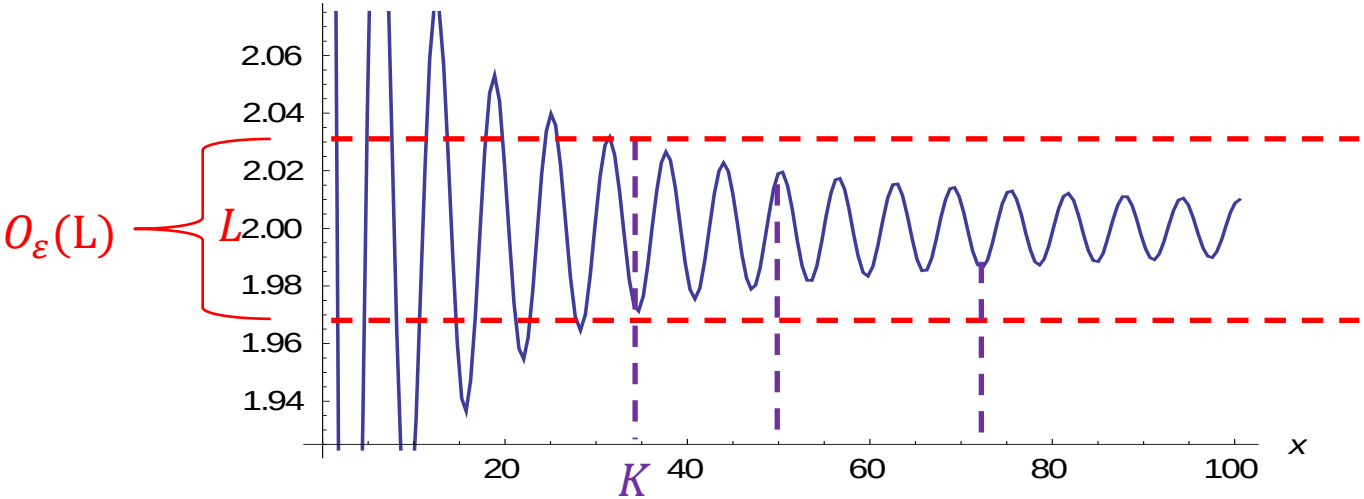
Budiž funkce *f* definována na intervalu *(C,+∞)*, respektive *(-∞,D)*
Říkáme, že funkce *f* má v nevlastním bodě +∞, respektive -∞
Vlastní limitu L a píšeme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{Resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Jestliže k libovolnému $O_\varepsilon(L)$ existuje číslo K takové, že

$$f((K,+\infty)) \subset O_\varepsilon(L) \quad \text{Resp.} \quad f((-\infty,K)) \subset O_\varepsilon(L)$$

EKOFUN



Nevlastní limita v nevlastním bodě

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

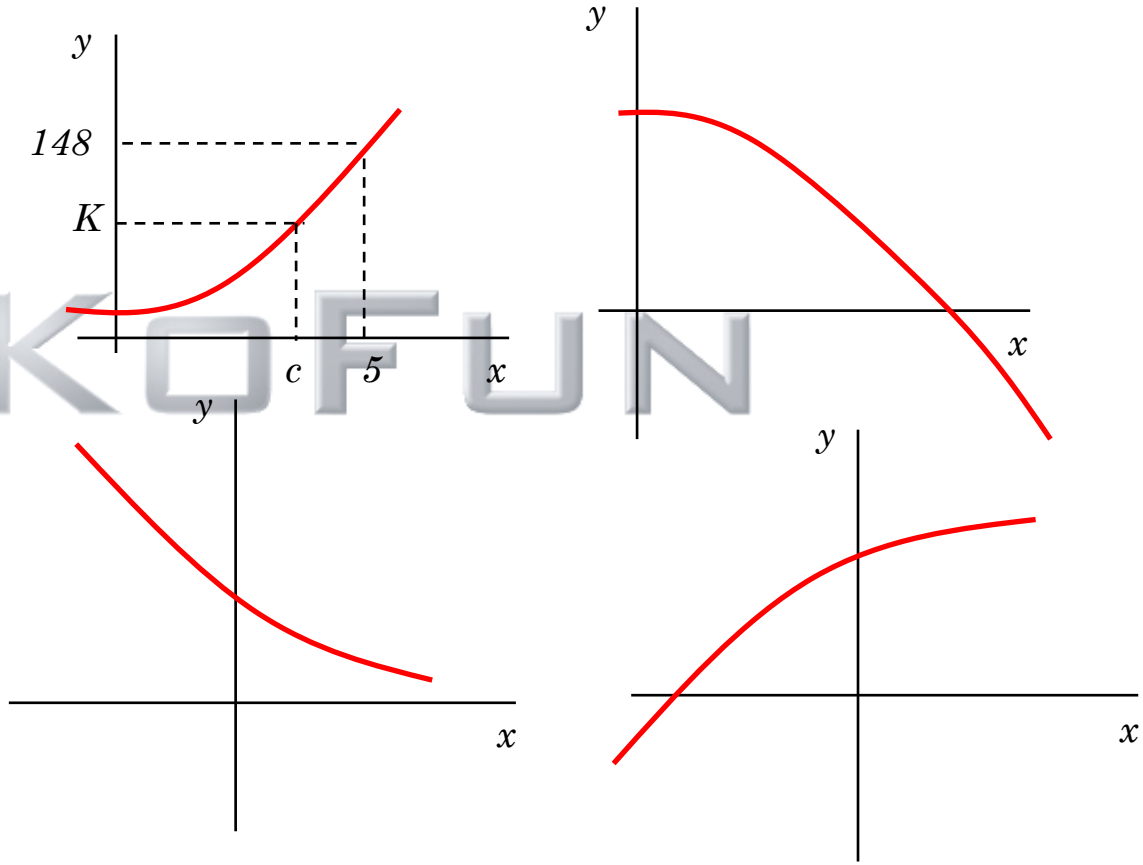
a $= \pm\infty, L = \pm\infty$, jedná se o **nevlastní limitu** $(L = \pm\infty)$ v **nevlastním bodě** $(a \pm \infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



EKOFUN

Definice:

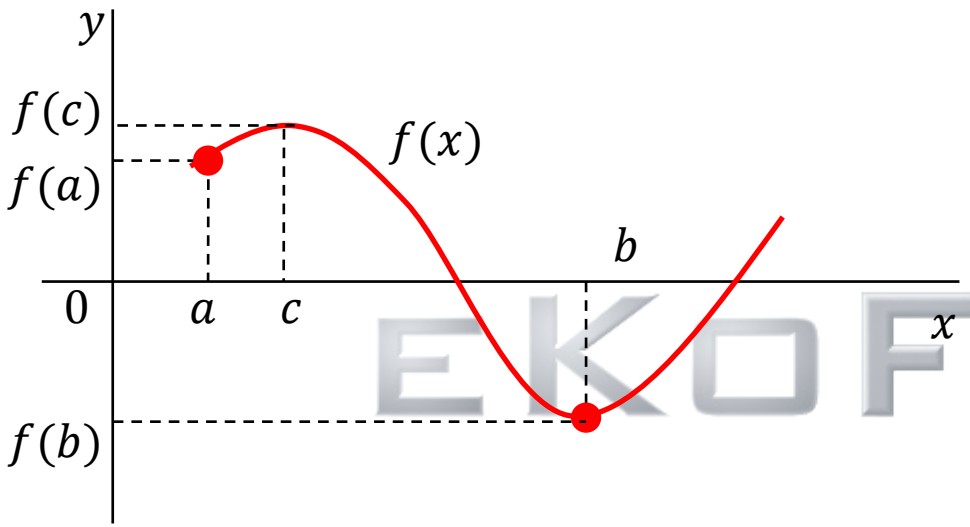
Říkáme, že funkce *f* má v nevlastním bodě +∞ nevlastní limitu +∞ jestliže k libovolnému *K>0* existuje *c>0* takové, že

$$f((c, +\infty)) \subset (K, +\infty)$$

Věta Weierstrassova

Funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $< a, b >$

Má v tomto intervalu maximum i minimum



EKOFUN

Věta (o limitě sevřené funkce – o dvou policajtech)

Nechť $f,g,h,$ jsou funkce jedné proměnné, $c \in R$

Jestliže v prstencovém okolí bodu c je

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad a \qquad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x)$$

Pak existuje $\lim_{x \to c} g(x)$ a platí

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x)$$