Neurčitý integrál

Úvod

Integrování je *inverzní proces* k derivování
Máme zderivovanou funkci a
integrací získáme původní funkci kterou jsme derivovali

$$F(x)' = 2x$$

$$F(x) = x^2$$

Umět pracovat s integrálním počtem
Je důležité pro práci s diferenciálními rovnicemi

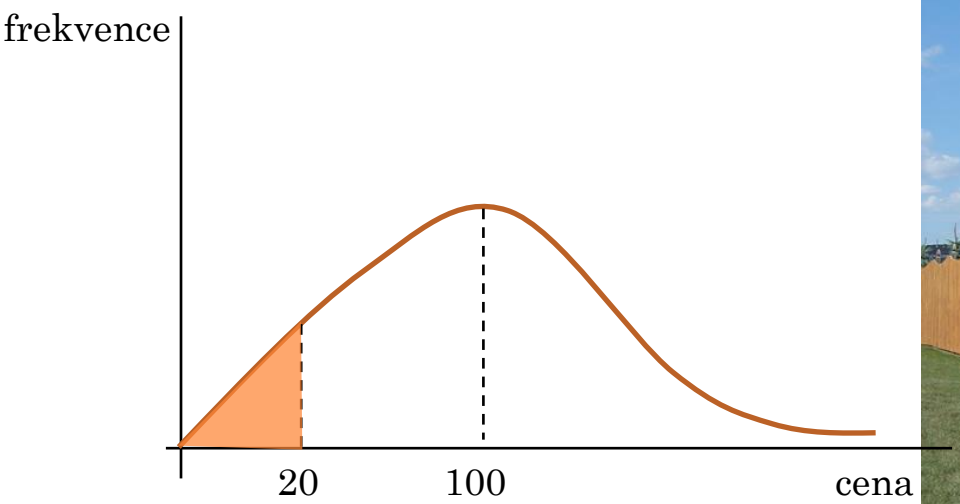
EKOFUN

„pro nás nejdůležitější“
Geometrická interpretace – plocha pod grafem funkce

$$LMC = \frac{dTC}{dQ}$$

$$LMC = 2Q + 3$$

$$TC = Q^2 + 3Q$$



Neurčitý integrál – teorie

Definice:
Nechť jsou funkce *f(x), F(x)* definována na otevřeném intervalu $I \in (a, b)$.
Jestliže pro každé $x \in I$ platí:

$$F'(x) = f(x)$$

Řekneme, že funkce *F(x)* je **primitivní funkcí** k *funkci f(x)*
Nebo také **neurčitým integrálem**

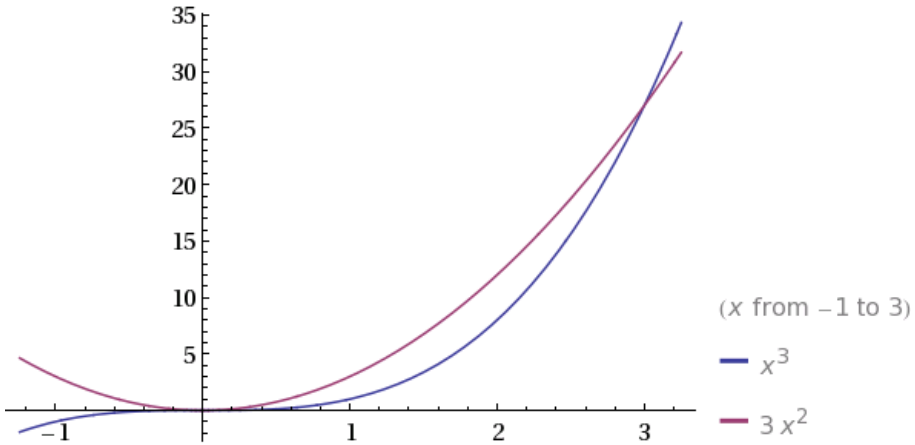
EKOFUN

$f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3$

Věta: (Postačující podmínka existence primitivní funkce)
Jestliže je funkce *f* spojitá na intervalu *I*
pak k ní v tomto intervalu existuje primitivní funkce

Někdy nebudeme schopni tuto primitivní funkci nalézt



$$F(x) = x^3 + 1$$

$$F(x) = x^3 + 2$$

$$F'(x) = 3x^2$$

Když přičteme k primitivní funkci *F(x)* libovolnou konstantu $c \in R$
Vždy bude platit $F'(x) = f(x)$

Pokud najdeme jednu primitivní funkci *F(x)*
Nalezneme tak nekonečně mnoho primitivních funkcí ve tvaru $F(x) + c$

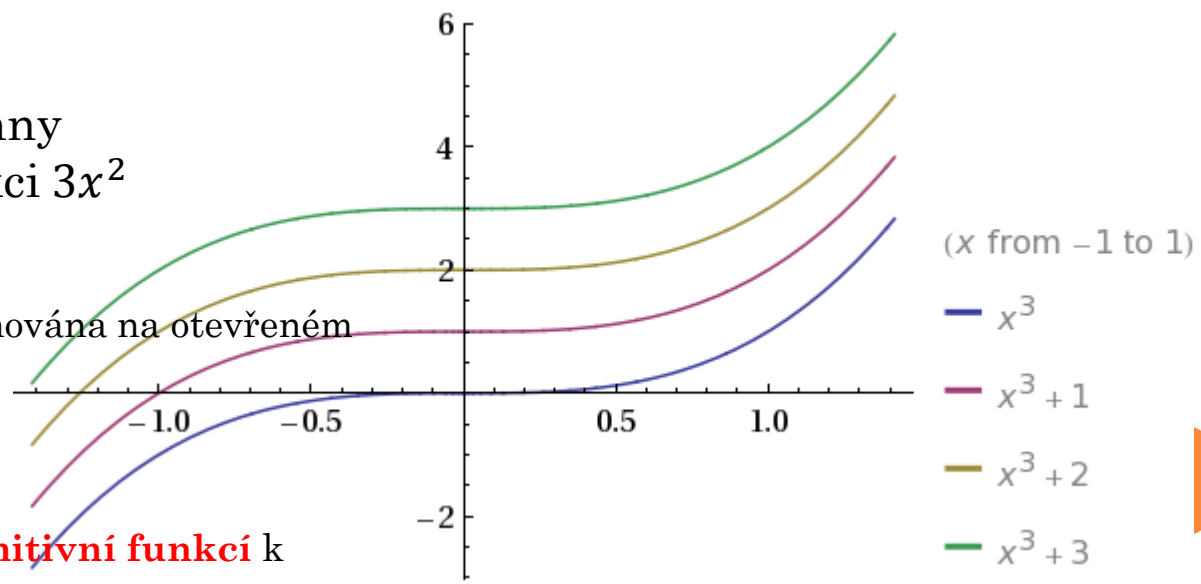
$$(F(x) + c)' = f(x)$$

EKOFUN

Aditivní konstanta

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + c$$

Výsledek zahrnuje všechny primitivní funkce k funkci $3x^2$



Definice:
Nechť jsou funkce *f(x), F(x)* definována na otevřeném intervalu $I \in (a, b)$.
Jestliže pro každé $x \in I$ platí:

$$F'(x) = f(x)$$

Řekneme, že funkce *F(x)* je **primitivní funkcí** k *funkci f(x)*

Věta:

Množinu všech primitivních funkcí *F(x)+c*, $c \in R$ na intervalu $I \in (a, b)$

K funkci *f(x)* budeme zapisovat ve tvaru

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in R$$

Integrační znak

Integrand

Integrační konstanta

Určuje podle které proměnné integruju

$$\int a.x\, dx = a.\frac{x^2}{2}$$

$$\int a.x\, da = x.\frac{a^2}{2}$$

EKOFUN

Integrační metody

Věta:

$$\int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx\,, c \in R$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

A dál už máte smůlu ☺

EKOFUN

Metoda per partes

Metoda vychází z věty o derivaci součinu dvou funkcí

Věta:
Nechť funkce *f(x)* a *g(x)*, mají na otevřeném intervalu *I* spojité derivace
Potom platí

$$\int lnx\, dx$$

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)dx$$

EKOFUN

Důkaz

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \;/ \int$$

$$(x.lnx)' = lnx + x.\frac{1}{x}$$

$$\int [f(x).g(x)]'dx = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)\, dx$$

$$\int (x.lnx)'dx = \int lnx\, dx + \int 1\, dx$$

$$x.lnx = \int lnx\, dx + \int 1\, dx$$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)\, dx$$

$$\int lnx\, dx = x.lnx - \int 1\, dx$$

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\, dx$$

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)dx$$

$$\int lnx\, dx = \begin{vmatrix} f' = 1 & f = x \\ g = lnx & g' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x.lnx - \int x.\frac{1}{x}dx = x.lnx - \int 1dx = x.lnx - x =$$

$$= x.(lnx - 1)$$

$$\int lnx\, dx = \begin{vmatrix} f' = lnx & f = ? \\ g = 1 & g' = 0 \end{vmatrix} =$$

EKOFUN

Metoda substituce

$$F(t) = \int f(t)$$

!!!DŮLEŽITÉ NAPOČÍTAT HOODNĚ PŘÍKLADŮ!!!

Metoda vychází z věty o derivaci složené funkce

$$(lnx^2)' = \frac{1}{x^2}.2x$$

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x)$$

My známe vlastnost primitivní funkce $F'(x) = f(x)$

$$\int [F(\varphi(x))]'dx = F(\varphi(x))$$

EKOFUN

$$[F(\varphi(x))]' = f(\varphi(x)).\varphi'(x) \;/\int$$

$$\varphi(x) = t$$

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \int [F(\varphi(x))]'dx$$

$$\varphi'(x) = \frac{dt}{dx}$$

$$\int f(t).\varphi'(x)\,dx = \int [F(t)]'dt = F(t) + c$$

$$\varphi'(x)\,dx = dt$$

$$= \int f(t)dt$$

$$\int f(t).\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t) + c$$

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)}$$

$$\int 2x.e^{x^2}dx$$

Úkolem je zjednodušit funkci

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \int [F(\varphi(x))]'dx = F(\varphi(x)) + c$$

$$\varphi(x) = t$$

$$\varphi'(x) = \frac{dt}{dx}$$

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t) + c$$

$$\varphi'(x)\,dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)}$$

$$e^{x^2} = f(\varphi(x)) \qquad \varphi(x) = x^2$$

$$\varphi'(x) = ?$$

Je v integrandu obsažena derivace vnitřní funkce?
Nebo alespoň nějaká její část?

EKOFUN

$$I = \int 2x.e^{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int 2x.e^t.\frac{dt}{2x} = \; = \int e^t dt = e^t + c \; = e^{x^2} + c$$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

Polynom a rozklad polynomu

Důležité pro integraci racionálních funkcí – (parciální zlomky)

Polynomem *n-tého* stupně rozumíme funkci ve tvaru

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^4 - 8x^2 + 16) : (x - 2)$$

$$x(\alpha) = 2$$

$$2x^3 - x^2 + 2$$

Polynom 3-tího stupně
$a_3 = 2$
$a_2 = -1$
$a_1 = 0$
$a_0 = 2$

EKOFUN

Kořen polynomu

Jedná se o číslo α pro které platí, že $P_n(\alpha) = 0$

$$x^2 - 2x$$

$$x.(x - 2) = 0$$

$$x = 0, x = 2$$

Kořeny polynomu

Věta:
Jeli číslo α kořenem polynomu $P_n(x)$, lze polynom $P_n(x)$ rozložit na tvar

$$P_n(x) = (x - \alpha).Q(x) \qquad \frac{P_n(x)}{(x - \alpha)} = Q(x)$$

$Q(x) - polynom\ stupně\ n - 1$

Existují vícenásobné kořeny
Imaginární kořeny

Integrace racionálních lomených funkcí

$$\int \frac{dx}{x^2-1} \qquad \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1} = x+3+\frac{3x-4}{x^2-x+1}$$

Našim úkolem je naučit se integrovat – ryze lomené racionální funkce
Neryze lomenou racionální funkci jsme schopni rozložit na polynom *n-tého* stupně a případně ryze lomenou racionální funkci

EKOFUN

Parciální zlomky

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \stackrel{?}{=} Ax^4 + Bx^2 + C$$

A=1
B=-8
C=16

Princip:

1) Snaha rozložit polynom ve jmenovateli na určitý počet součinů
2) Zlomky následně rozdělit na součet jednodušších zlomků
3) Zjistit konstanty v čitatelích, aby se byla splněna rovnost

Parciální zlomky

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1).(x+1)} \qquad \frac{1}{(x-1).(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1).(x+1)}$$

Princip:

1) Snaha rozložit polynom ve jmenovateli na určitý počet součinů
2) Zlomky následně rozdělit na součet jednodušších zlomků
3) Zjistit konstanty v čitatelích, aby se byla splněna rovnost

$$\frac{1}{(x-1).(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \quad /(x-1).(x+1)$$

$$1 = A.(x+1) + B.(x-1)$$

$$1 = Ax + A + Bx - B \qquad 1 = x.(A+B) + (A-B)$$

EKOFUN

$$x^4 - 8x^2 + 16 \stackrel{?}{=} Ax^4 + Bx^2 + C$$

$$x = 0$$

$$0 = x.(A+B) + (A-B-1)$$

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1$$

$$A = -B$$

$$A - B = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$-B - B = 1$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(x-1).(x+1)} = \frac{1}{2.(x-1)} + \frac{-1}{2.(x+1)}$$

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2}$$

Princip:

1) Snaha rozložit polynom ve jmenovateli na určitý počet součinů
2) Zlomky následně rozdělit na součet jednodušších zlomků
3) Zjistit konstanty v čitatelích, aby se byla splněna rovnost

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{5x-1}{(x-2).(x+1)}$$

$$\frac{5x-1}{(x-2).(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad /(x-2).(x+1)$$

EKOFUN

$$5x-1 = A.(x+1) + B.(x-2)$$

$$5x-1 = Ax + A + Bx - 2B$$

$$0 = Ax + A + Bx - 2B + 1 - 5x$$

$$x.(A+B-5) + (A-2B+1)$$

$$A + B = 5$$

$$A - 2B = -1$$

$$A = 5 - B \qquad A = 3$$

$$(5-B) - 2B = -1$$

$$-3B = -6$$

$$B = 2$$

$$\frac{5x-1}{(x-2).(x+1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$$