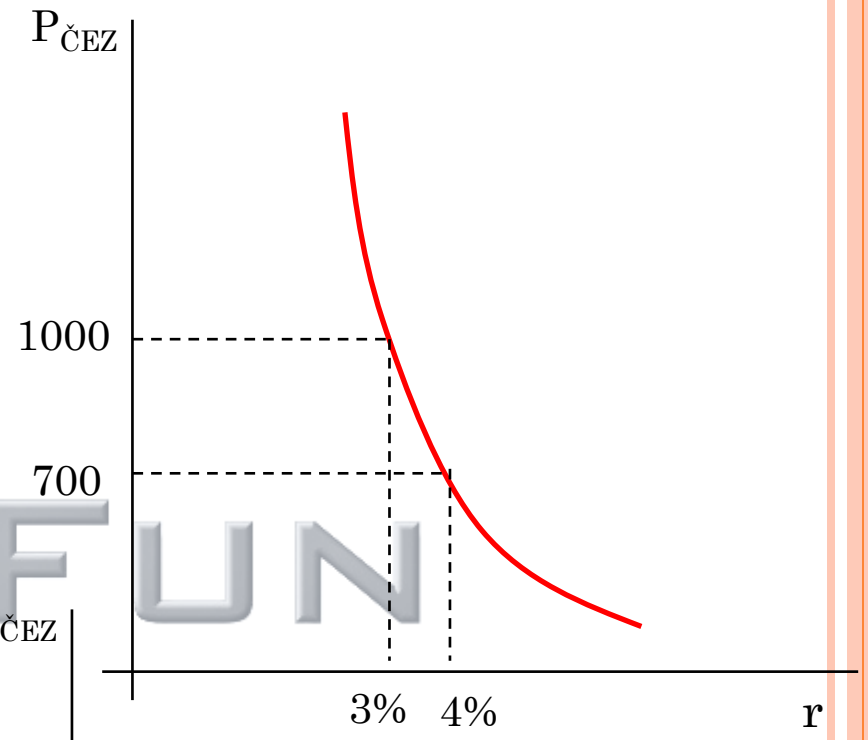
Derivace – úvod

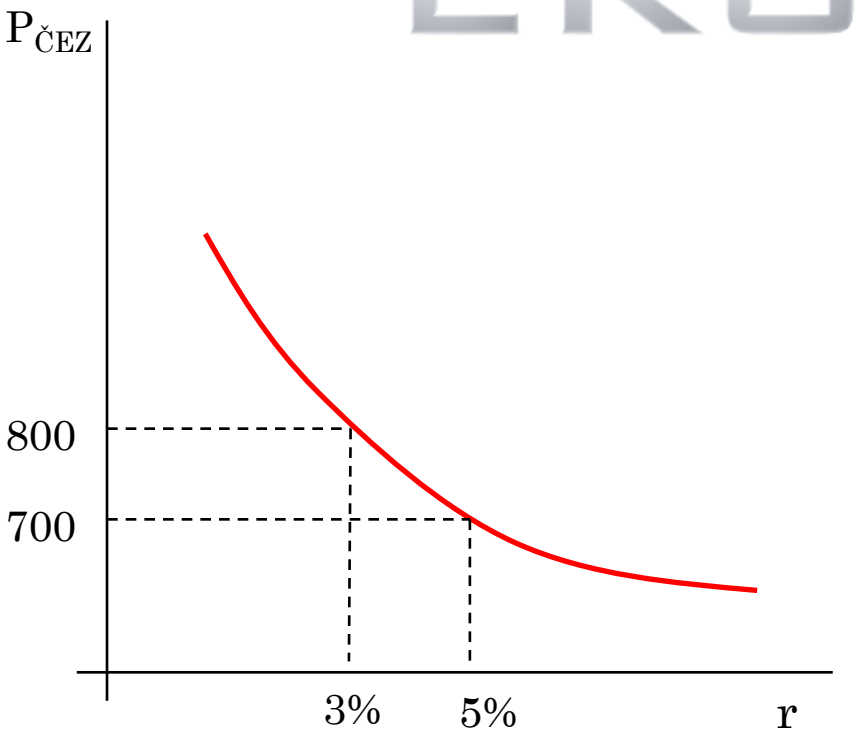
Jak zjistit míru změny?

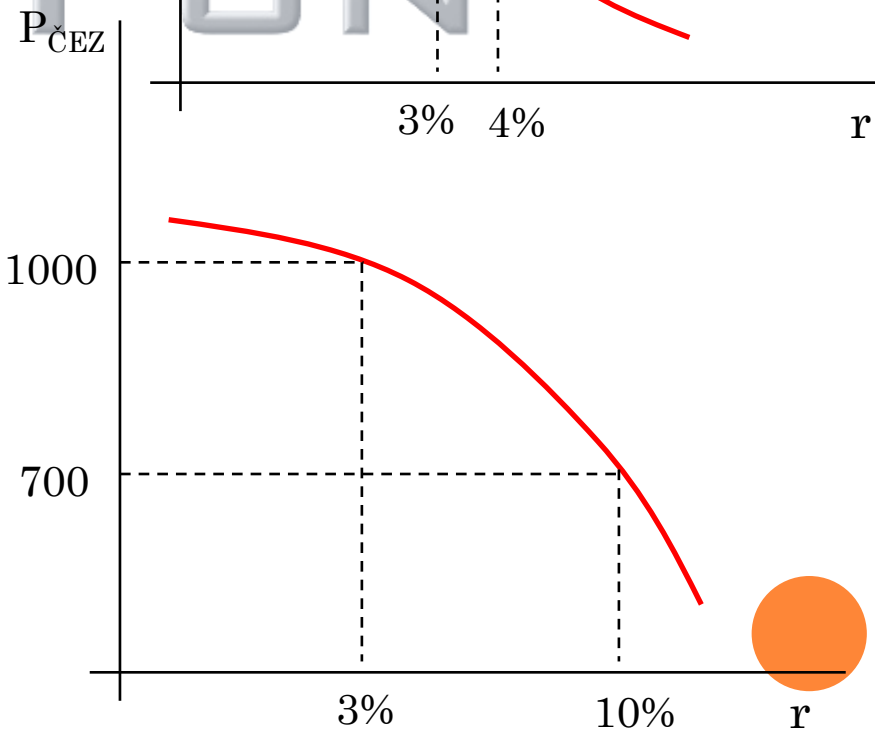
Derivace nám dá odpověď jestli je funkce:

- rostoucí/klesající
- konkávní/konvexní
- „jak moc je strmá“ – jak moc roste
- kde má maximum/minimum

EKOFUN



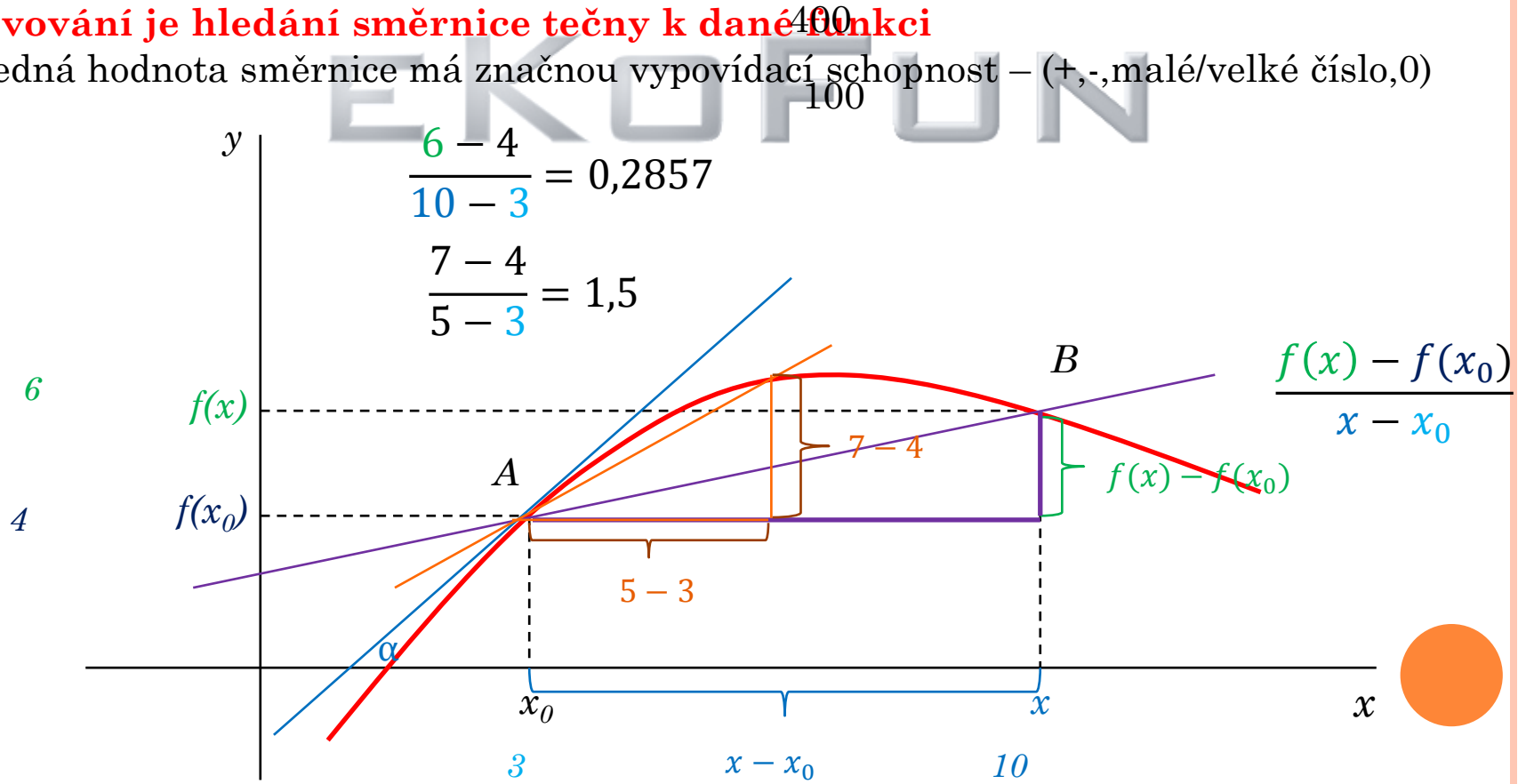




Grafická interpretace derivace

Jak stanovit velikost změny?
„velká, malá, kladná, záporná“
Potřebujeme zjistit velikost této změny v určitém bodě
(malou změnu) „trojúhelníčkování“
Když najdeme tečnu v daném bodě *(A)*
Zjistíme úhel, který svírá s osou *x*
Získáme POMĚRNĚ přesný závěr o velikosti změny funkce v daném bodě
Derivování je hledání směrnice tečny k dané funkci
Výsledná hodnota směrnice má značnou vypovídací schopnost – (+,-,malé/velké číslo,0)

EKOFUN

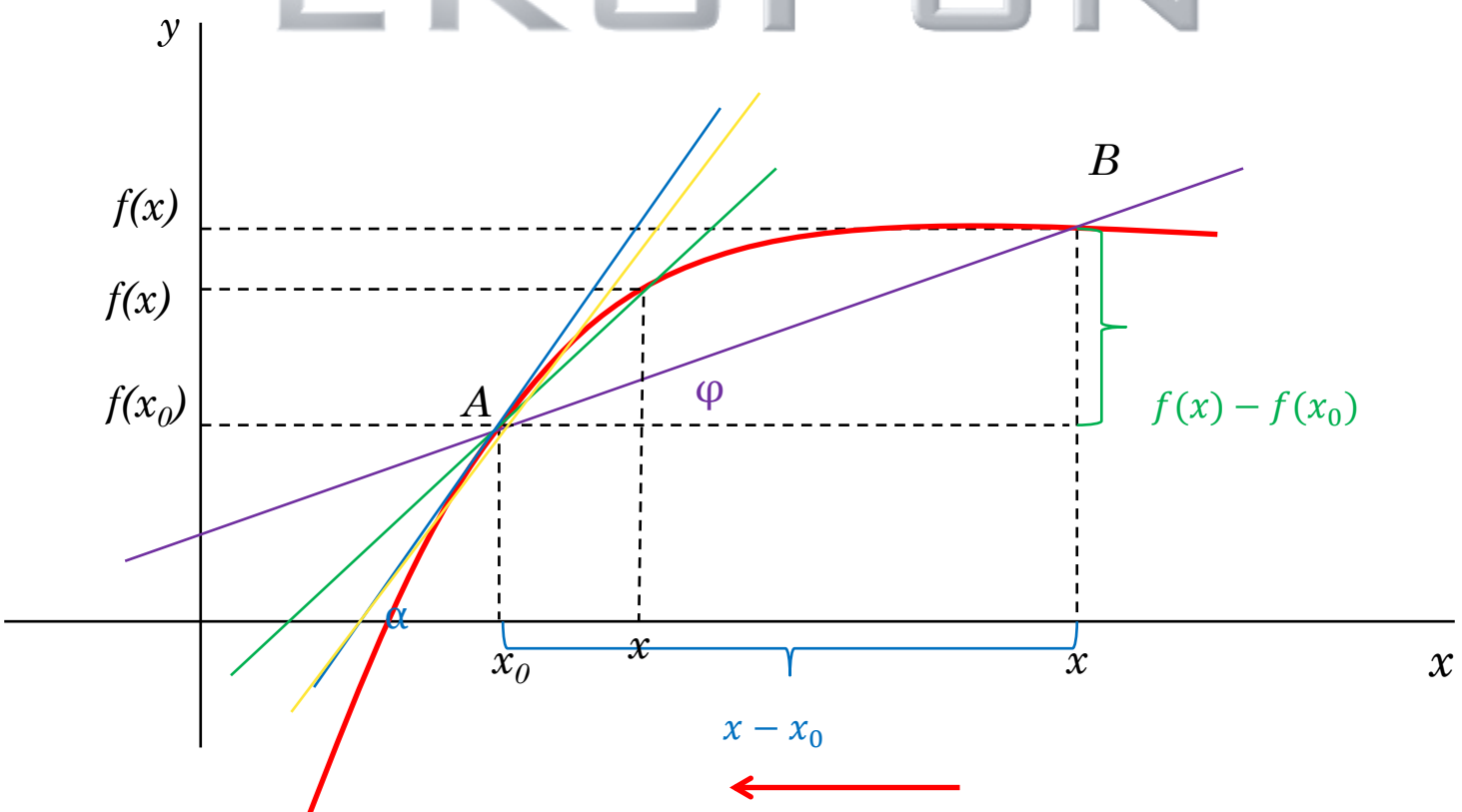


Jak zjistíme směrnici tečny v daném bodě aneb definice derivace

- Spojíme body A,B – sečna
- tgφ – směrnice SEČNY v bodě A – odhad derivace funkce
- Sestrojíme tečnu v bodě A
- Zpřesníme odhad
- x se bude blížit k x_0
- $f(x)$ se blíží $f(x_0)$- pohyb po křivce
- směrnice fialová sečna se blíží ke směrnici tečny

$$tg\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

EKOFUN



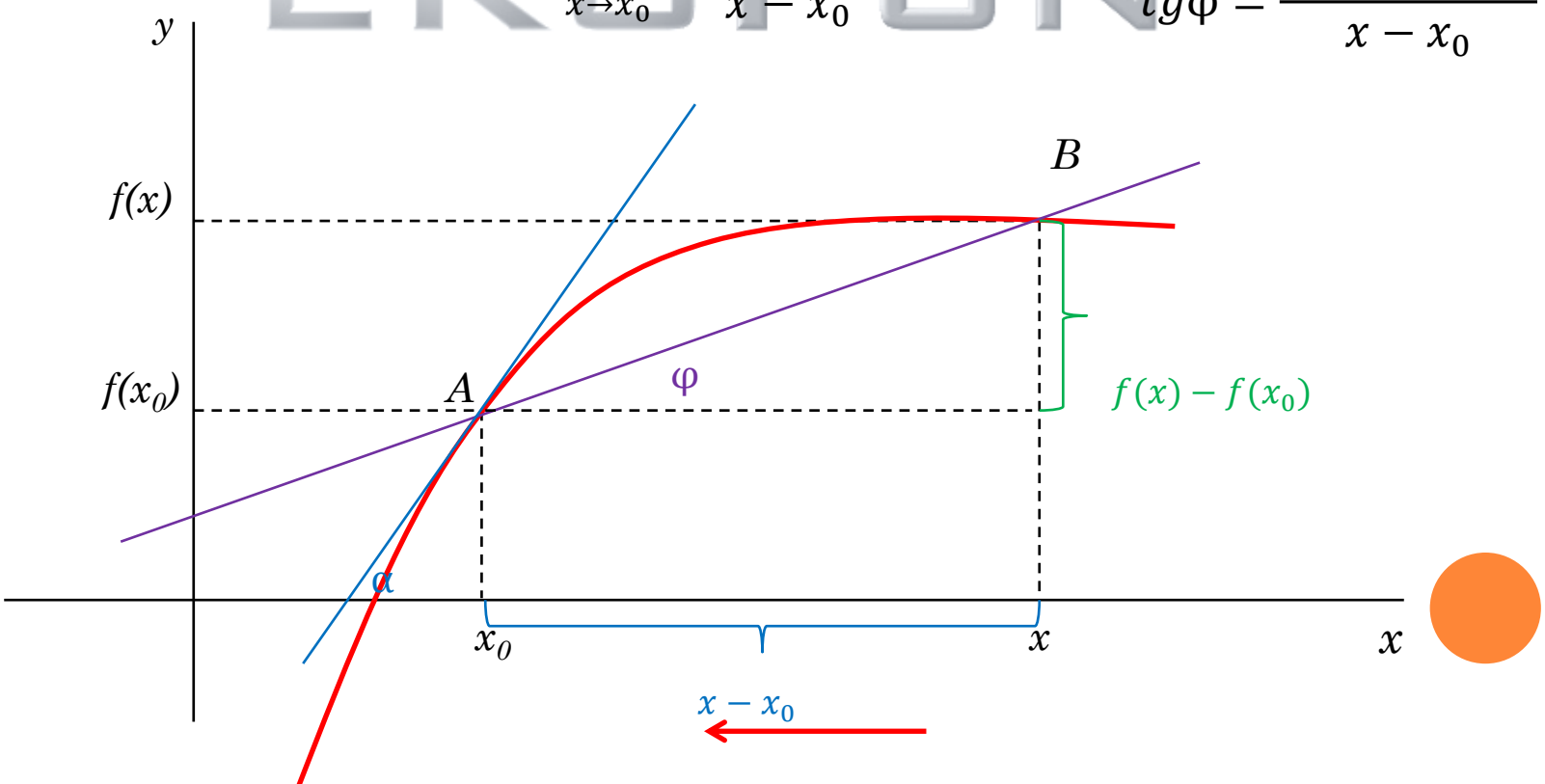
Definice:

Řekněme, že funkce *f(x)* má v bodě x_0 derivaci právě tehdy když
Je definovaná v nějakém okolí $O(x_0)$ a existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

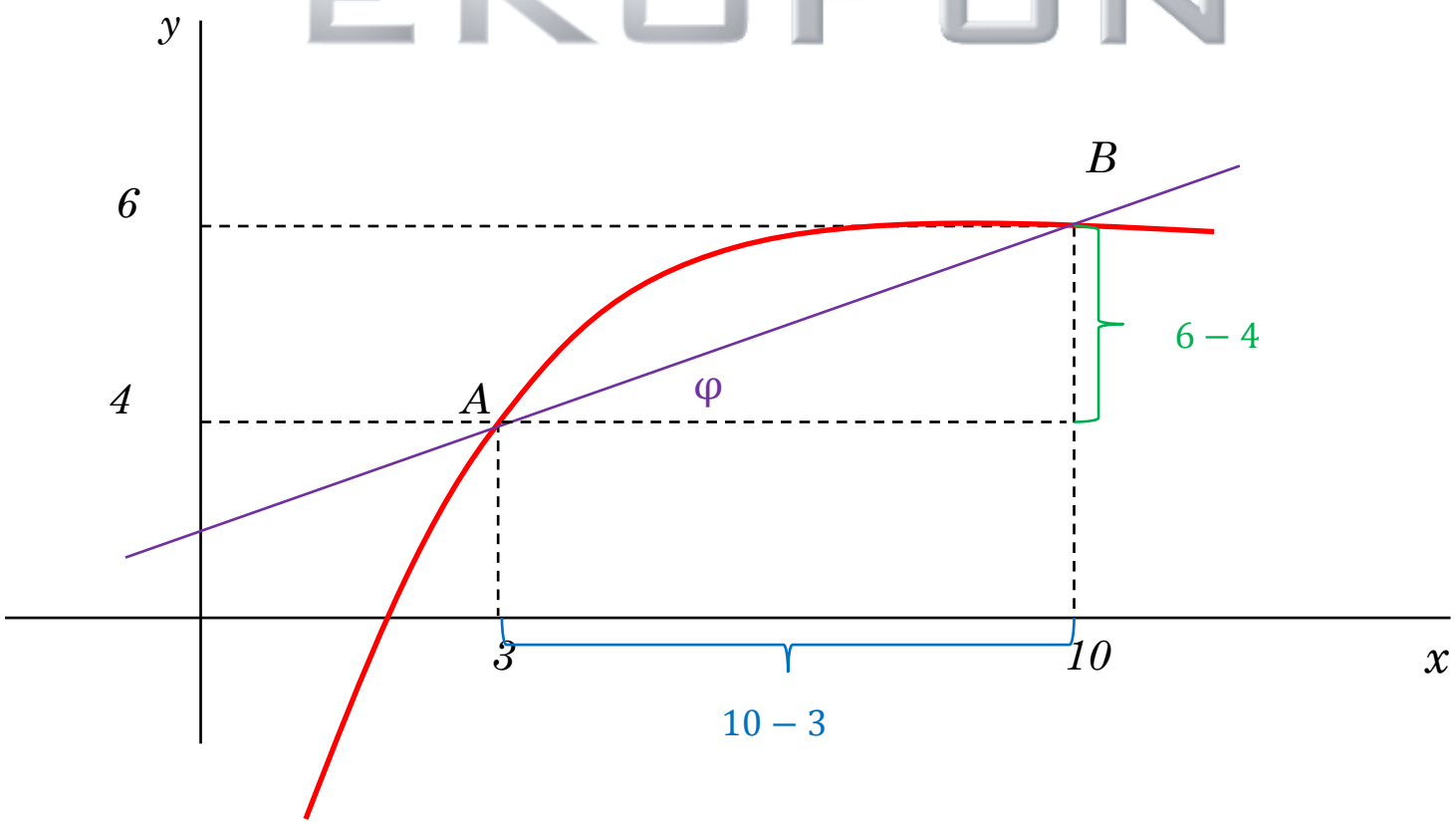
Tuto limitu označme $f'(x_0)$ a nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad tg\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$tg\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad tg\varphi = \frac{6-4}{10-3} = 0{,}2857 \qquad \varphi = 16°$$

EKOFUN



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tvar se kterým se setkáme častěji

- x se blíží k x_0 ($x \to x_0$) – h se zmenšuje a zmenšuje $\quad x - x_0 = h \qquad x = x_0 + h$
- h se blíží k nule $h \to 0$
- *„malinká změna“*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

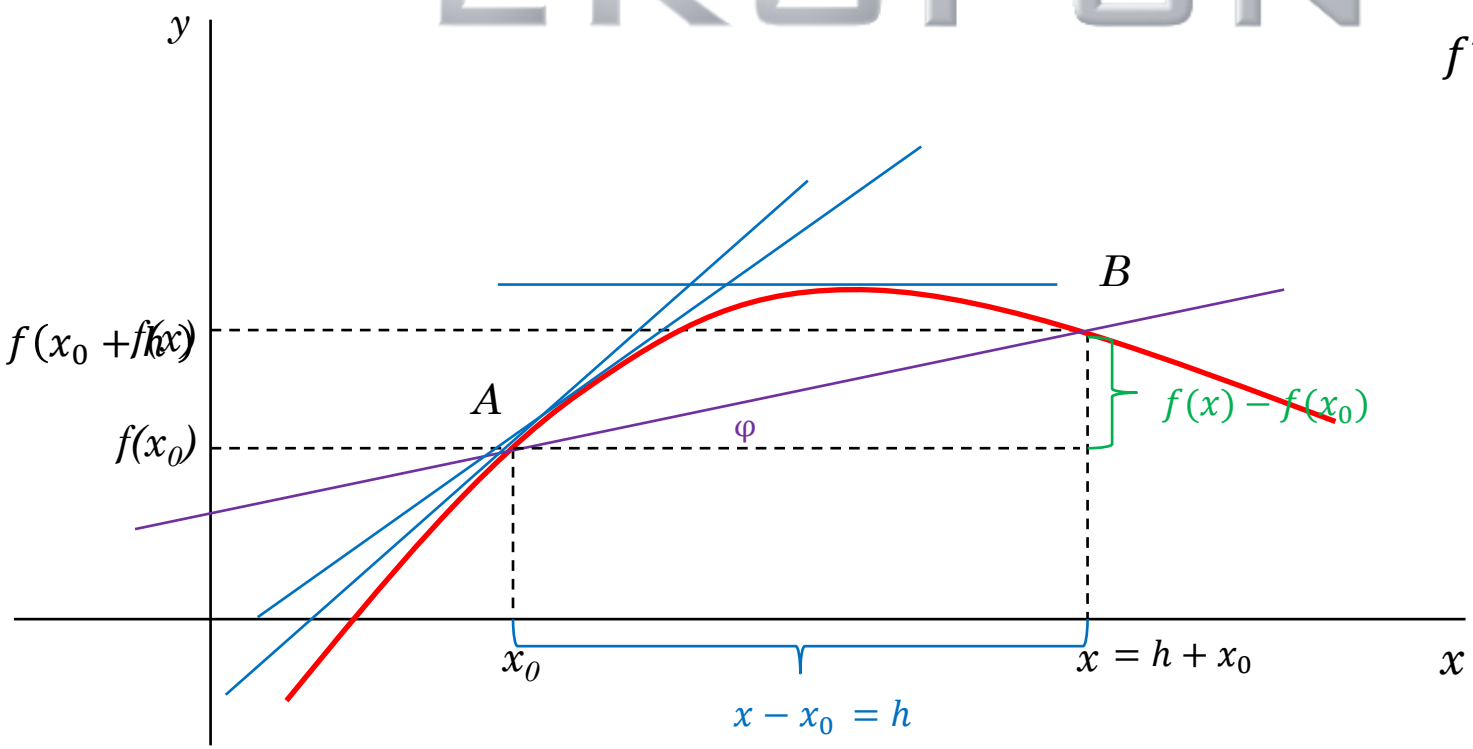
$y = x^2 \qquad f'(x)? \qquad f'(4)?$

$$h = \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0).(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 2x_0$$

EKOFUN

$$f'(4) = 2.4 = 8$$



Definice:
Nechť funkce *f* je definována na intervalu I, $x_0 \in I$.
Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_+'(x_0)$$

resp.

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_-'(x_0)$$

EKOFUN

Pak tuto limitu nazýváme derivací funkce *f* v bodě x_0 zprava, resp. zleva

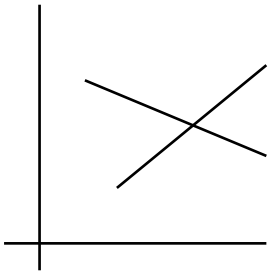
Věta:
Funkce *f* má v bodě x_0 derivaci (vlastní/nevlastní), právě tehdy, má-li v bodě x_0 obě jednostranné derivace a platí

$$f_+'(x_0) = f_-'(x_0)$$

Společná hodnota těchto derivací je rovna $f'(x_0)$

Rovnice tečny a co nám řekne její směrnice

Derivace v bodě x_0 $f'(x_0)$ - udává směrnici tečny v bodě x_0



Tečna je přímka

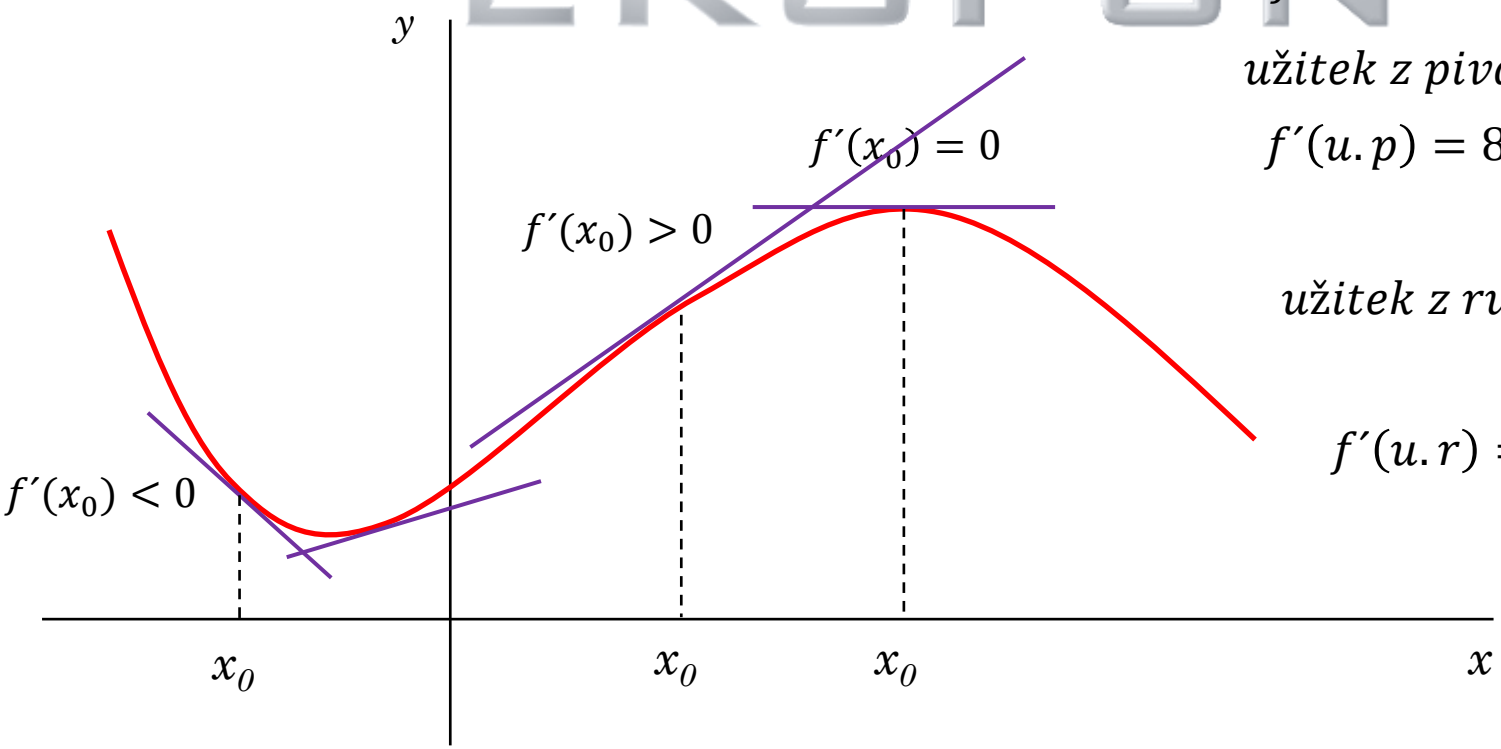
$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

$$y = a \pm bx$$

Absolutní člen

Směrnice

EKOFUN



jak mám rád pivo a rum

$$užitek\ z\ piva = 4.pivo^2$$

$$f'(u.p) = 8.pivo$$

$$užitek\ z\ rumu = \frac{1}{rum}$$

$$f'(u.r) = -\frac{1}{rum^2}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

$y = x^2 \qquad x_0 = 4$

$f'(x) = 2x$

$y - 4^2 = f'(x_0).(x - 4)$

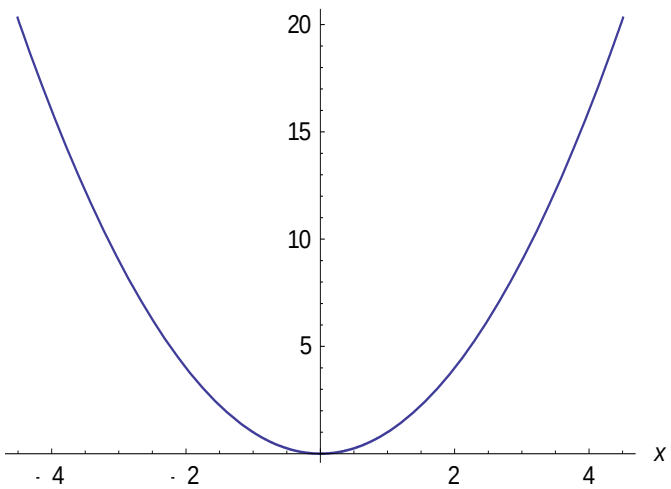
$y = a \pm bx$

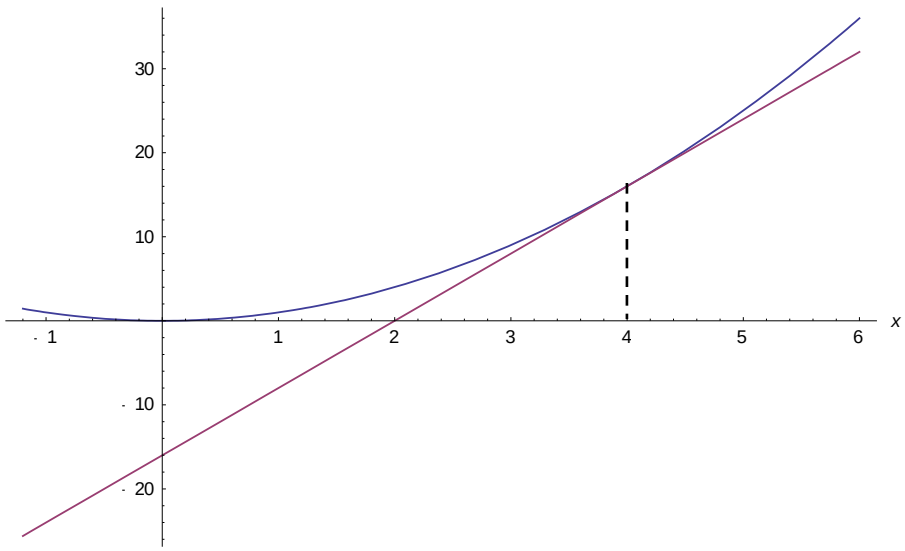
$y - 4^2 = 2.4.(x - 4)$

$y = 16 - 32 + 8x$

$y = -16 + 8x$

EKOFUN

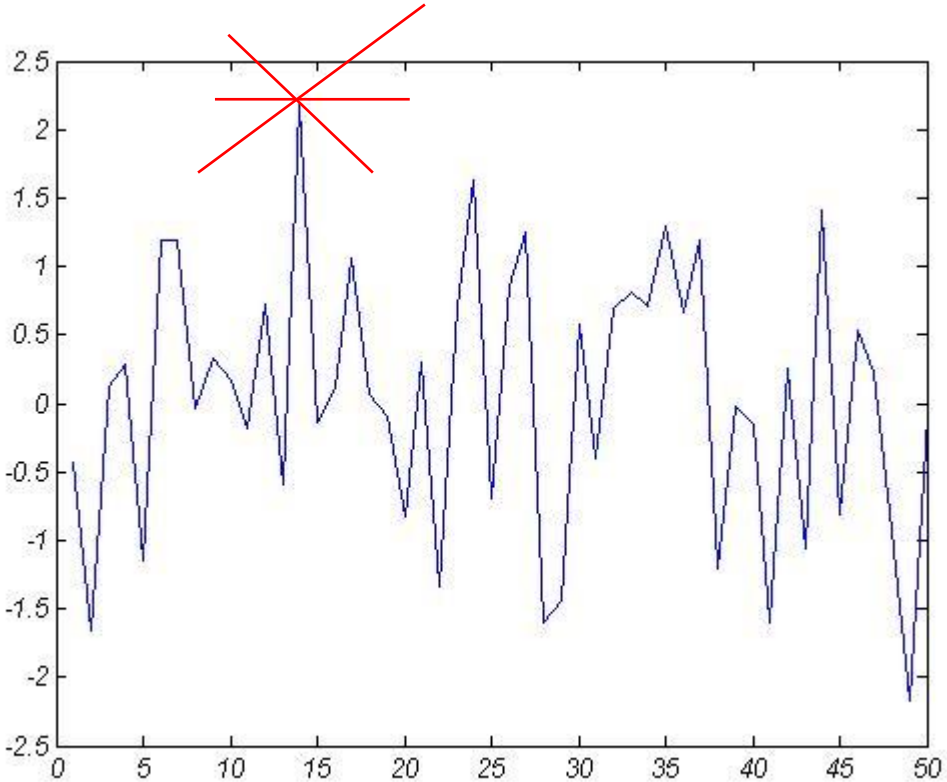




Pokud má funkce v daném bodě derivaci je zde spojitá ALE
Spojitost funkce „automaticky“ neznamená, že na celém *D(f)* existují derivace

Funkce nemá derivaci v bodech,
ve kterých neexistuje tečna ke grafu funkce

Pokud je funkce v intervalu *(a,b)* spojitá a **HLADKÁ**
Existuje v každém bodě intervalu *(a,b)* její derivace



Pravidla pro výpočet derivací

$$(k)' = 0, k \in R$$

$$(x^a)' = a.x^{a-1}, a \in R$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^a}\right)' = (x^{-a})' = -a\frac{1}{x^{a+1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(a^x)' = a^x lna, a > 0, a \neq 1$$

EKOFUN

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x.lna}, a > 0, a \neq 1$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

$$(sinx)' = cosx$$

$$(cosx)' = -sinx$$

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$$

$$(cotgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arccotgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Derivace výpočetní metody

$$(i)\ [k.f(x)]' = k.f'(x), k \in R$$

$$(ii)[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

EKOFUN

$$(iii)[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$(iv)\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(v)\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

Derivace složené funkce

Věta:
Předpokládejme, že má funkce *φ(x)* v bodě *a* derivaci.
Dále předpokládejme, že funkce *f(x)* má derivaci v bodě *b= φ(a)*
Pak platí, že složená funkce *f(φ(x))* má v bodě *a* derivaci rovnou

$$f'(b)\varphi'(a) = f'(\varphi(a))\varphi'(a)$$

$$a = 2$$

$$\varphi(x) = (5x + x^2)$$

$$f(x) = lnx$$

$$\frac{9}{14} = \frac{9}{14}$$

EKOFUN

$$\varphi'(x) = 5 + 2.x$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

$$\varphi'(2) = 5 + 2.2 = 9$$

$$\varphi(2) = 5.2 + 2^2 = 14$$

$$f'(14) = \frac{1}{14}$$

$$\frac{1}{14}.9 = \frac{9}{14}$$

$$\ln(5x + x^2)' = \frac{1}{5x + x^2}.(5 + 2x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{5.2 + 2^2}.(5 + 2.2) = \frac{9}{14}$$

$$f\left(g\left(h(x)\right)\right)' = f'\left(g\left(h(x)\right)\right).g'\left(h(x)\right).h'(x)$$

Je to jako striptýz

$\ln(cosx^2)$

$$\ln(cosx^2) = \frac{1}{cosx^2}.(-sinx^2).2.x$$

EKOFUN

$f = lng$

$g = cosh$

$h = x^2$

Derivace vyšších řádů

Derivace *(f´)*funkce *(f)* je opět funkcí
Tuto funkci můžeme znovu derivovat *(f´´)*

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

Pojem *n-tá* derivace funkce *f*
n=4

$$f^4 = f''''$$

EKOFUN

Využití například u průběhu funkce **(konkávní/konvexní)** funkce

$$(lnx)'' = ? \qquad (lnx)'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^2)''' = ?$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(2x)' = 2$$

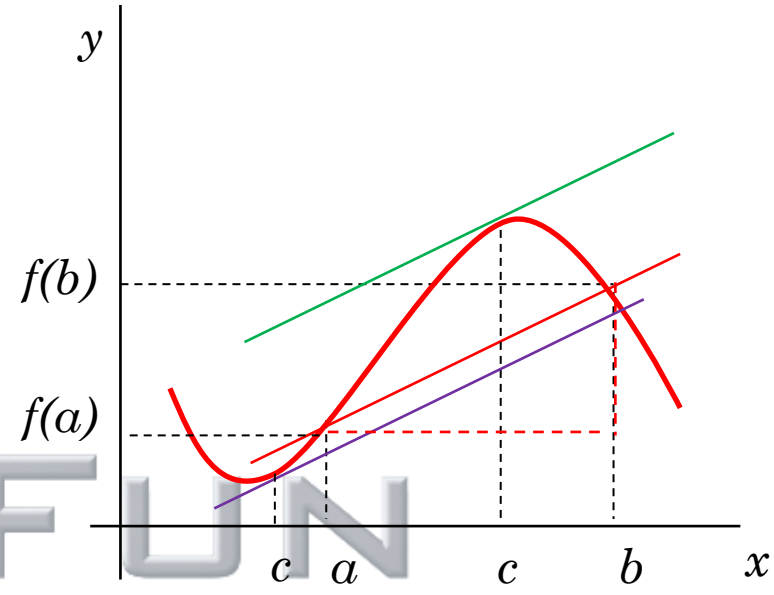
$$(2)' = 0$$

Věta (Rollova)

Nechť je dána funkce *f* splňující tyto vlastnosti

- Je spojitá na intervalu $< a, b >$
- V intervalu (a,b) má derivaci (pro každé x)
- $f(a) = f(b)$

Pak existuje bod $c \in (a, b)$
Takový, že $f'(c)=0$



Tečna ke grafu v bodě c je rovnoběžná s osou x
Využití při určování extrémů

EKOFUN

Věta o střední hodnotě diferenciálního počtu

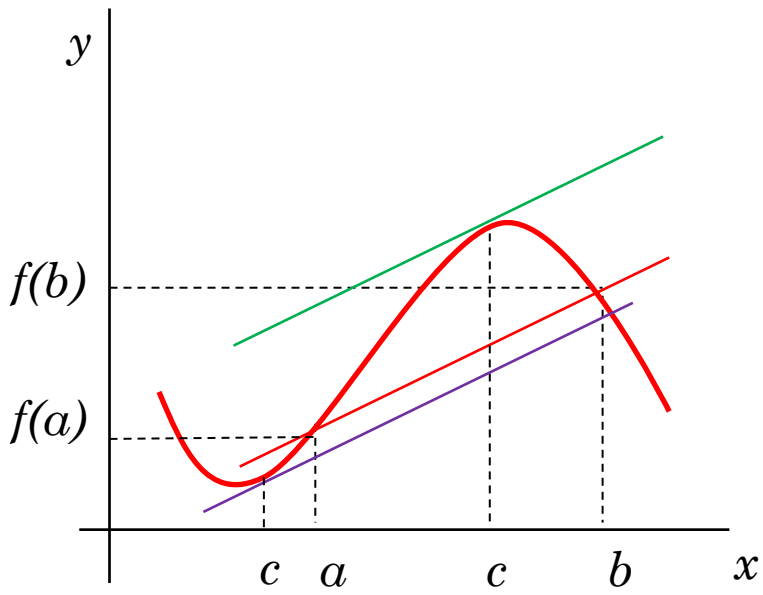
(Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Mějme funkci *f*, spojitou na intervalu $< a, b >$, která má derivaci na (a, b)
Pak na otevřeném intervalu *(a,b)* existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$
V němž platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$

Česky – na grafu musí existovat alespoň jeden bod *C[c,f(c)]*
V němž tečna sestrojená ke grafu *f* je rovnoběžná s přímkou protínající body *A[a,f(a)]* a *B[b,f(b)]*

Tečna ke grafu v bodě *C[c,f(c)]* je rovnoběžná se sečnou dané funkce



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$

Česky – na grafu musí existovat alespoň jeden bod *C[c.f(c)]*
V němž tečna sestrojená ke grafu *f* je rovnoběžná s přímkou protínající body *A[a,f(a)]* a *B[b,f(b)]*

Tečna ke grafu v bodě *C[c,f(c)]* je rovnoběžná se sečnou dané funkce

L´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$$

Využití věty o střední hodnotě
U limit problém s neurčitými výrazy $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x+4}$$

Věta:
Nechť pro funkce *f(x)*, *g(x)*, platí jedna z následujících podmínek

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
(ii) $\lim_{x\to a}|g(x)| = \lim_{x\to a}|f(x)| = \infty$

„a může být“

$\lim_{x\to a}$

$\lim_{x\to a-}$

$\lim_{x\to a+}$

$\lim_{x\to\infty}$

$\lim_{x\to-\infty}$

Nechť existuje vlastní či nevlastní limita $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Pak existuje také limita $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

A tyto limity se sobě rovnají

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Česky
Při splnění určitých předpokladů
Je limita podílu dvou funkcí
Rovna limitě podílu derivací, těchto funkcí

Nederivovat jako podíl
Někdy nám vyjde neurčitý výraz i po derivacích
Derivujeme znovu