Charakteristiky NV

Číselné charakteristiky náhodných veličin

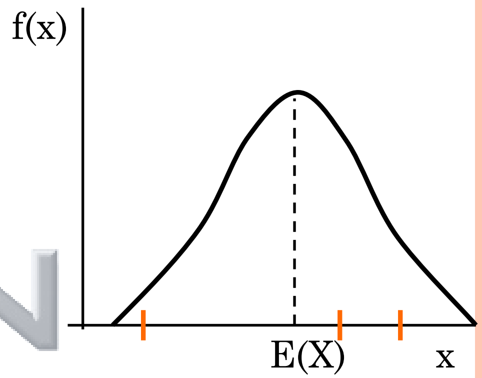
Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny je vyčerpávajícím způsobem popsáno pomocí pravděpodobnostní fce./hustoty pravděpodobnosti
A vždy pomocí distribuční funkce

Někdy zbytečně složité
Často stačí – **číselné charakteristiky**
Potřebujeme porovnat dvě rozdílné náhodné veličiny
Velikost dívčího poprsí na VŠE a na ČZU
Rozdělení důchodu v různých profesích

Střední hodnota
Rozptyl
Špičatost
Šikmost
Kvantily

STŘEDNÍ HODNOTA

Jedná se o charakteristiku polohy náhodné veličiny
(poloha na číselné ose – průměr možných hodnot NV X)
Průměrnou hodnotu, kolem které náhodná veličina kolísá



Opět musíme rozlišit NV:
S diskrétním, nebo spojitým rozdělením pravděpodobnosti

Střední hodnota pro diskrétní rozdělení NV – E(X)

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i . p(x_i)$$

E(X)=1.0,2+2.0,3+3.0,2+4.0,15+5.0,07+6.0,05+7.0,03=2,86
Střední hodnota pro velikost poprsí v aule VŠE je 2,86

x_i	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

Střední hodnota pro spojité rozdělení pravděpodobnosti – E(X)

Stejná logika jako u diskrétní

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f(x)\,dx$$

Příklad:

$$f(x) = 2x \quad x \in (0,1) \qquad E(X) = \int_{0}^{1} x.\,2x\,dx \quad = 2.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Vlastnosti střední hodnoty

1) $E(c)=c$
2) $E(c.X)=c.E(X)$
3) $E(X_1+X_2+\dots X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\dots E(X_n)$
4) $E(X_1.X_2\dots X_n)=E(X_1).E(X_2)\dots E(X_n)$

Rozptyl

Kolísavost, variabilita – hodnot NV kolem její střední hodnoty

$$\mathbf{D(X)=E(X-E(X))^2}$$

Opět musíme rozlišovat diskrétní a spojité náhodné veličiny

Rozptyl pro diskrétní náhodnou veličinu

$$D(X) = \sum_{x_i} (x_i - E(X))^2 . p(x_i)$$

Rozptyl pro spojitou náhodnou veličinu

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 . f(x) dx$$

$$D(X)=E(X-E(X))^2$$

$$D(X)=\sum_{x_i}(x_i-E(X))^2.p(x_i)$$

Po úpravě – $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$D(X)=\sum_{x_i} x_i^2.p(x_i)-(E(X))^2$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx-(E(X))^2$$

E(X)=2,86

D(X)=(1-2,86)^2.0,2+(2-2,86)^2.0,3+…+(7-2,86)^2.0,03=2,44

D(X)=(1^2.0,2+2^2.0,3+3^2.0,2+4^2.0,15+5^2.0,07+6^2.0,05+7^2.0,03)-2,86^2 = 2,44

Výhoda pro spojitou NV

f(x)=2.x E(X)=2/3 (0;1)

$$D(X)=\int_0^1 x^2.2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2.\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

Vlastnosti rozptylu

1) $D(c)=0$
2) $D(c+X)=D(X)$
3) $D(aX)=a^2.D(X)$
4) $D(X_1+X_2+\ldots X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots D(X_n)$

Směrodatná odchylka (δ)

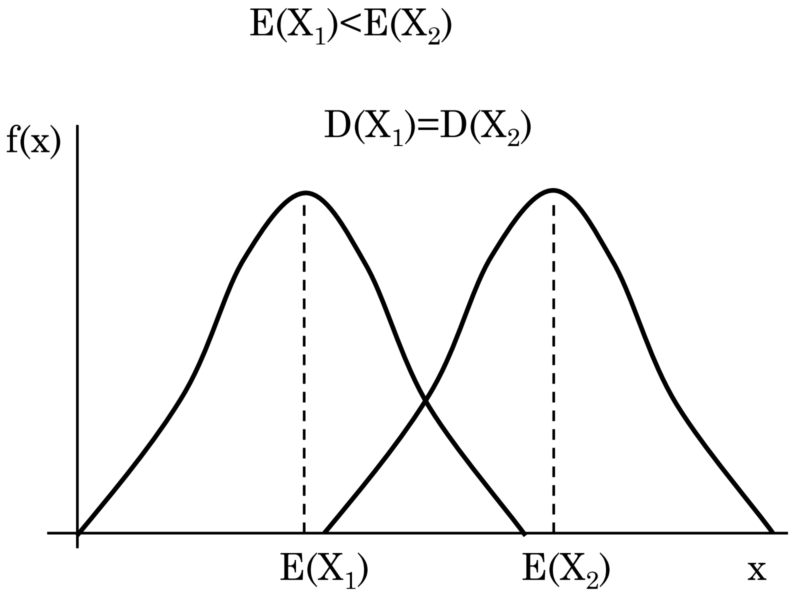
„průměrná odchylka X od své střední hodnoty E(X)“

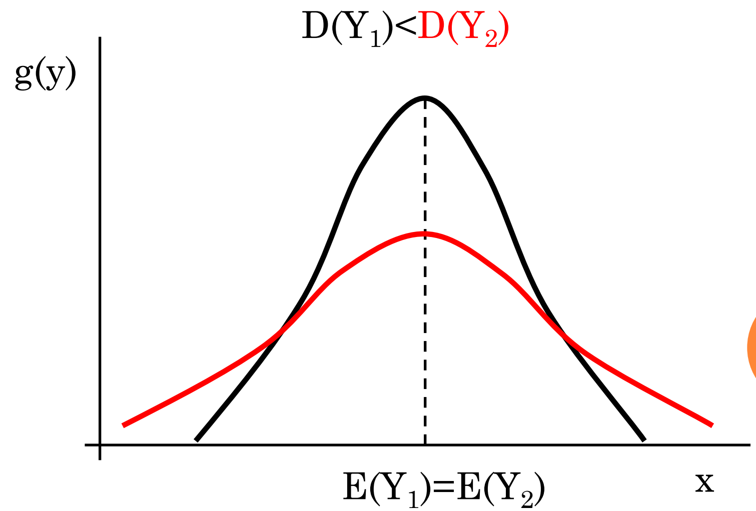
$$\delta = \sqrt{D(X)}$$

V praxi – „rizikovost“ CP – jak moc kolísá cena kolem očekávané střední hodnoty

Rozdíly v E(X)/E(Y) a D(X)/D(Y) pro 2 náhodné veličiny

Výška mužů v Asii a Evropě





Kvantily

DALŠÍ charakteristika spojité náhodné veličiny

p% kvantil – x_p

$$P(X \le x_p) = p \quad \text{neboli} \quad F(x_p) = p$$

Pravděpodobnost, že NV bude menší, rovna zvolenému kvantilu

50% kvantil – medián
25% kvantil – dolní kvantil
75% kvantil – horní kvantil

Zvolíme p=0,9
Potom 90%-ním kvantilem je číslo x_p(konkrétní) takové
Že pravděpodobnost toho, že NV nebude větší než $x_{0,9}$ je 0,9, tedy 90%

Graficky

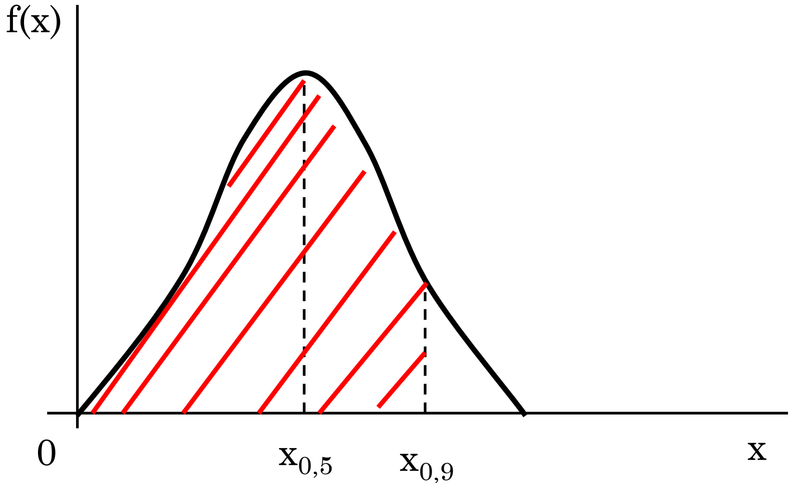
Máme požadovanou pravděpodobnost a hledáme na ose x $P(X \leq x_p) = p$

Medián – 50% kvantil $P(X \leq x_{0,5}) = 0,5$

Hledáme $x_{0,5}$ – souměrné rozdělení náhodné veličiny – přesně v půlce

90% kvantil $P(X \leq x_{0,9}) = 0,9$

Hledáme takové $x_{0,9}$-pro které platí, že náhodná veličina padne do tohoto intervalu s pravděpodobností 90%



$$P(X \le x_p) = p$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Příklad

f(x)= e^x pro x>0
Cíl určit 90% kvantil ($x_{0,9}$)

$$P(X \le x_{0,9}) = \int_0^{x_{0,9}} e^x dx = 0,9$$

$$\int_0^{x_{0,9}} e^x dx = 0,9$$

$$= [e^x]_0^{x_{0,9}} = 0,9$$

$$e^{x_{0,9}} - 1 = 0,9$$

$$x_{0,9} = ln1,9 = 0,6418$$