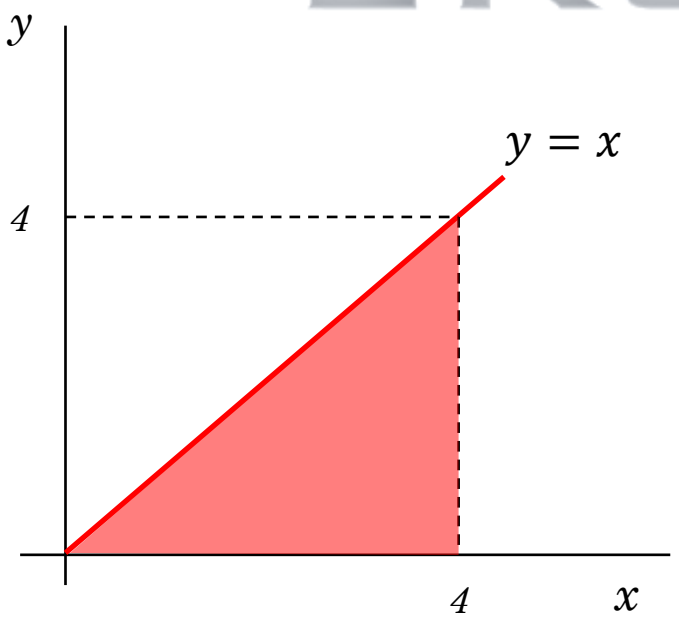
Určitý integrál

Úvod

$$S = \frac{4.4}{2} = 8$$

EKOFUN



$$S = \int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8$$

Určitý integrál

Definice (Newton-Leibnitz)
Nechť funkce *f(x)* je funkce definována na intervalu *I* a *F(x)* je primitivní
K funkci *f(x)* na $I \in (a, b)$. Potom určitým integrálem funkce f od a do b
Rozumíme číslo *F(b)-F(a)*

Horní integrační mez

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dolní integrační mez

$$[F(x)]_a^b$$

Neurčitý integrál „nějaké“ funkce *f(x)*
je funkce *F(x)*, kdy platí $F'(x) = f(x)$

$$\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8$$

Určitý integrál „nějaké“ funkce *f(x)* od a do b
Je číslo *F(b)-F(a)*
Kde $F(x) = \int f(x)dx$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$F(4) = \frac{4^2}{2} \qquad F(0) = \frac{0^2}{2}$$

Věta:

(i) $$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx\ , k \in R$$

(ii) $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

(iv) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$je - li\ f\ sudá\ a\ existuje\ \int_{-a}^{a} f\ pak$$

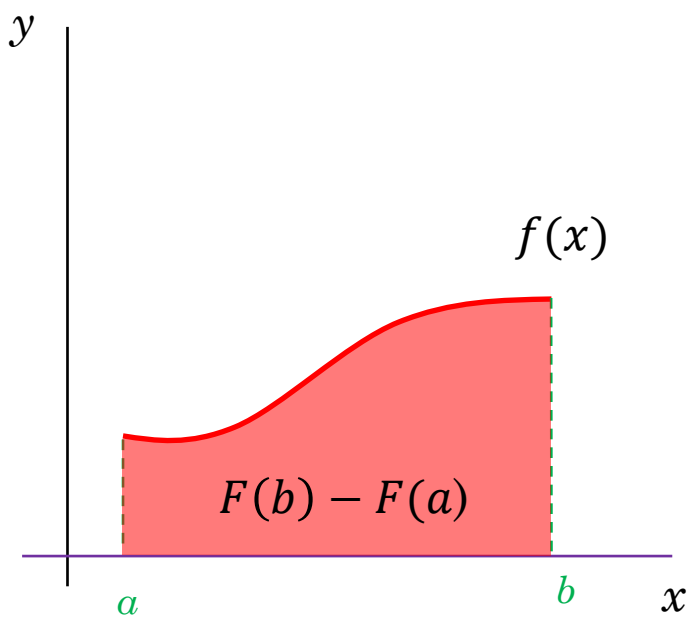
$$\int_{-a}^{a} f = 2.\int_0^a f$$

Věta:
Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$.
Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x
A přímkami $x=a$, $x=b$, má plošný obsah

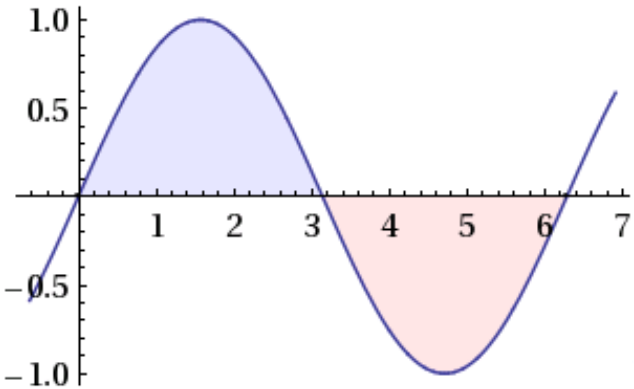
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

EKOFUN

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$.
Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x
A přímkami $x=a$, $x=b$, má plošný obsah



$$\int_0^{2\pi} sinx\, dx = 0$$

Je plocha skutečně nula?

$$\int_0^{\pi} sinxdx - \int_{\pi}^{2\pi} sinx\, dx = 2 - (-2) = 4$$

Věta:
Jestliže je funkce f v intervalu $< a, b >$ záporná
Pak obsah plochy omezené grafem funkce f, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$ je

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} sinx\, dx = -2$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$-\int_{\pi}^{2\pi} sinx\, dx = 2$$

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $< a, b >$, které splňují $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in < a, b >$
Potom pro plošný obsah S obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f a g a přímkami $x=a$, $x=b$:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$x^2 = x + 2 \qquad f(x) = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad g(x) = x^2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

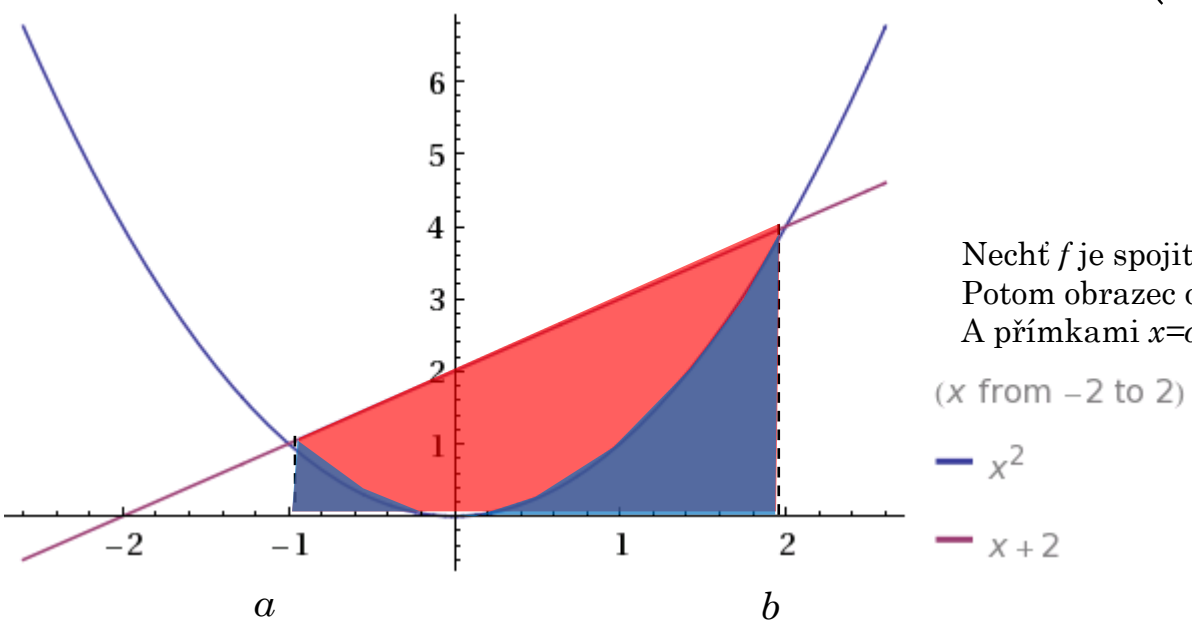
1) Určit meze
2) Sestavit integrál – pamatovat definici

$$\int_{-1}^{2} \big((x+2) - x^2\big)dx = \int_{-1}^{2} x + 2\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{2^2}{2} + 2.2\right) - \left(\frac{-1^2}{2} + 2.(-1)\right)\right] - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

EKOFUN



Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$.
Potom obrazec ohraničený grafem funkce f, osou x
A přímkami $x=a$, $x=b$, má plošný obsah

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $< a, b >$, které splňují $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in < a, b >$

Potom pro plošný obsah S obrazce, který je ohraničen grafy funkcí f a g a přímkami $x=a$, $x=b$:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$2 - x^2 = 2x^2 - 10$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 10$$

$$g(x) = 2 - x^2$$

1) Určit meze
2) Sestavit integrál

$$\int_{-1}^{2} \big((x+1) - (-x^2+1)\big)dx = \int_{-1}^{2} x + 1\, dx + \int_{-1}^{2} x^2 - 1dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= [\left(\frac{2^2}{2} + 2.2\right) - \left(\frac{-1^2}{2} + 2.(-1)\right] - (\frac{2^3}{3} - \frac{-1^3}{3})$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

EKOFUN

Obdélníky

- vepsané
- opsané

$$S_v = 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4 = 10$$

$$S_o = 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4 + 1.5 = 15$$

$$S = \frac{5.5}{2} = 12{,}5$$

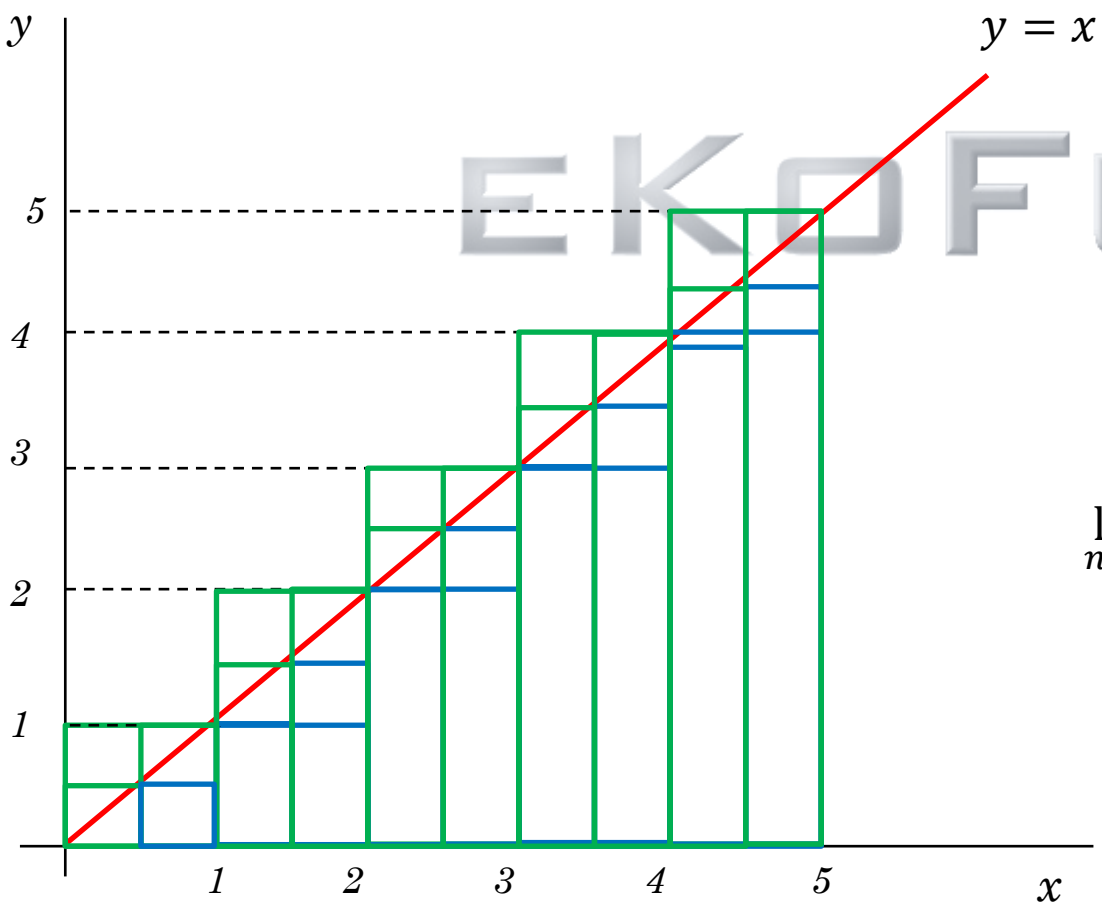
$$S_v < S < S_o$$

$$10 < 12{,}5 < 15$$

$$S_v = 0{,}5.0{,}5 + 0{,}5.1 + 0{,}5.1{,}5 + 0{,}5.2 + 0{,}5.2{,}5 + 0{,}5.3 + 0{,}5.3{,}5 + 0{,}5.4 + 0{,}5.4{,}5 = 11{,}25$$

$$S_o = 0{,}5.0{,}5 + 0{,}5.1 + 0{,}5.1{,}5 + 0{,}5.2 + 0{,}5.2{,}5 + 0{,}5.3 + 0{,}5.3{,}5 + 0{,}5.4 + 0{,}5.4{,}5 + 0{,}5.5 = 14$$

$$11{,}25 < 12{,}5 < 14$$



EKOFUN

Čím jemnější rozdělení
Tím odhad bude přesnější

$$\lim_{n\to\infty} S_v = S = \lim_{n\to\infty} S_o$$

n – *množství obdélníků*

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b f'(x).g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

$$\int lnx\, dx = \begin{vmatrix} f' = 1 & f = x \\ g = lnx & g' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x.lnx - \int x.\frac{1}{x}dx = x.lnx - \int 1dx = x.lnx - x =$$

$$= x.(lnx - 1)$$

$$\int_1^5 lnx\, dx = \begin{vmatrix} f' = 1 & f = x \\ g = lnx & g' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = [x.lnx]_1^5 - \int_1^5 x.\frac{1}{x}dx = \quad [x.lnx]_1^5 - [x]_1^5 =$$

$$= (5.ln5 - 1.ln1) - (5 - 1) = 5.ln5 - 4$$

EKOFUN

Substituce a určitý integrál

Věta:
Je-li funkce *f(t)* spojitá na intervalu $< a, b >$ a funkce $t = \varphi(x)$
Má spojitou derivaci na intervalu $< \alpha, \beta >$ a zobrazuje tento interval na $< a, b >$
Tak, že *α=φ(α), b=φ(β)*, potom

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

EKOFUN

$$I = \int 2x.e^{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int 2x.e^{t}.\frac{dt}{2x} = \; = \int e^{t}dt = e^{t} + c \;\; = e^{x^2} + c$$

$$\int_{1}^{4} 2x.e^{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int_{1}^{16} e^{t} = e^{16} - e^{1}$$

Už nemusíme „vracet“ substituci

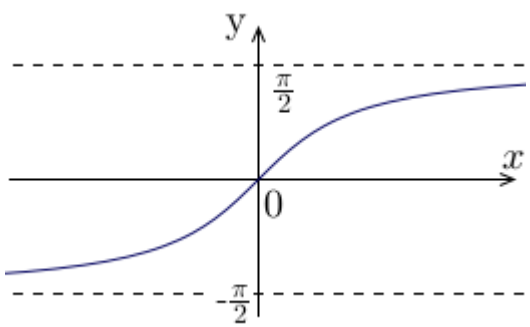
Nevlastní integrály

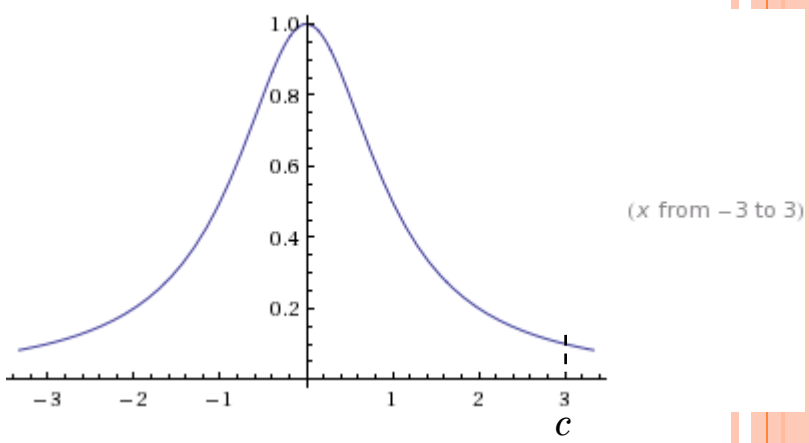
Jaký je plošný obsah?

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\lim_{c\to+\infty} \int_0^{c} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to+\infty} [arctg\, x]_0^c = \lim_{c\to+\infty} arctg\, c - 0 = \frac{\pi}{2}$$

EKUFUN





Definice:

Nechť funkce f není v bodě a definována (resp. a=-∞)

A v intervalu $(a, b >$ k ní existuje primitivní funkce.

Integrál $\int_a^b f$, resp. $\int_{-\infty}^b f$, definovaný vztahem

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f \quad \text{Resp.} \quad \int_{-\infty}^b f = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f$$

EKOFUN

Se nazývá **nevlastní integrál funkce *f* vlivem dolní meze**

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f \qquad \int_a^\infty f = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f$$

horní meze

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = [2.\sqrt{x}]_0^1$$

$c \to 0+$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0+} [2.\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to +\infty} [2.\sqrt{x}]_1^c = \lim_{c \to +\infty} (2\sqrt{c} - 2) = +\infty$$

$c \to +\infty$

Definice:
Nechť funkce *f* je definovaná a spojitá na intervalu *(a,b)* (může *a*=-∞, *b*=+∞)
Nechť *F(x)* je primitivní funkce k funkci *f(x)* na intervalu *(a,b)*.
Potom integrálem $\int_a^b f(x)dx$ rozumíme číslo

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

Pokud obě limity existují a jsou konečné, říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ **konverguje**
Pokud jedna z limit je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ **diverguje**

EKOFUN

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = -1 - \lim_{c\to 0+}\left(-\frac{1}{c}\right) = +\infty$$

Jdeme do ….. ☺
Integrál diverguje

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}\right) + 1 = 1$$

Jak se *x* blíží k nekonečnu, tak se integrál blíží k *1*
Integrál konverguje

Srovnávací kritérium

Nechť funkce *f* a *g* jsou spojité na intervalu *(a,b)* a
Nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$
Potom platí:

1) konverguje-li integrál $\int_a^b g(x)dx$, konverguje i integrál $\int_a^b f(x)dx$ a je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2) Diverguje-li integrál $\int_a^b f(x)dx$, diverguje i integrál $\int_a^b g(x)dx$

EKOFUN

Délka „křivky“

Tvrzení:
Nechť je dána spojitá funkce f, která má na $< a, b >$ derivaci.
Pak délku grafu této funkce v intervalu $< a, b >$ spočteme

$$L\big(f(x)\big) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

EKOFUN

$f(x) = x$

$< 0{,}3 >$

$$L\big(f(x)\big) = \int_0^3 \sqrt{1 + [1]^2}\, dx = \sqrt{2}.\int_0^3 dx = \sqrt{2}\,.\,[x]_0^3 = 3.\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{3.3.2} = 3.\sqrt{2}$$

Vzpomínáte na tento vztah? ☺