Statistické hypotézy

Základní pojmy

Bodové/intervalové odhady – Maruška řešila hodnoty parametrů
(průměr, rozptyl atd.)

Zde bude Maruška dělat hypotézy (předpoklady) ohledně parametrů Z.S.
Výsledek nebude číslo, ale výrok!!!
Výrok bude „vyřčen“ s určitou spolehlivostí – obsahuje určité riziko

Maruška opět nebude muset provést vyčerpávající šetření
Na základě výběrového souboru (50 chlapců) bude činit závěry
Ohledně parametrů základního souboru

Testování hypotéz

Maruška bude stát před 2 hypotézami (H_0 a H_1)
Jejím cílem je učinit výrok, která hypotéza platí
Například hypotéza jak je to s tím průměrem

H_0 : $\mu=\mu_0$ (16cm)

Proti stojí alternativní hypotéza H_1, která se snaží popřít H_0
H_1 může být dvoustranná, nebo jednostranná (jako u odhadů)

H_1: $\mu\neq\mu_0$ - dvoustranná hypotéza
H_1: $\mu>\mu_0$ – pravostranná hypotéza (průměr Z.S. je větší než μ_0 – 16cm)
H_1: $\mu<\mu_0$ – levostranná hypotéza (průměr Z.S. je menší než μ_0 – 16cm)

Důležité

Test sestavíme tak, abychom dokázali platnost H_1,
tedy zamítli platnost H_0

Chyby

Řekl jsem: „výrok je vyřčen s určitou spolehlivostí“
Maruška si musí být vědoma, že existuje určité riziko
že výrok nebude správně

Cílem je dokázat H_1
– riziko přijmutí H_1 (průměr není 16cm), ale průměr bude 16 cm, platí H_0

Chyba prvního druhu (α)
Maruška vše správně spočítá(uvidíme dále), zamítne tak H_0 a přijme H_1
Ale z nějakého důvodu bude platit H_0
Pravděpodobnost, že se dopustí této chyby (1-druhu) je α (5%,10%,)

Chyba druhého druhu (β)
Opak – Maruška vše správně spočítá
Vyjde jí, že H_0 platí – nezamítne tak H_1
Ale ve skutečnosti bude platit H_1 a nebude platit H_0
Pravděpodobnost, že se dopustí této chyby (2-druhu) je ß
Síla testu 1- ß – pravděpodobnost, že se nedopustíme chyby 2 druhu

Dopustíme 5% (ß=0,05) – nedopustíme 1- ß – 1-0,05 – 95%
Na 95% se jí nedopustíme

Postup

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} . \sqrt{n}$$

Více nás bude zajímat chyba 1 druhu

1) Před testem si zvolíme tzv. **hladinu významnosti**
   Pravděpodobnost, se kterou jsme ochotni nést riziko 1 druhu
   (přijmeme H_1, ale platí H_0)

U_2

U_1

2) Vybereme testové kritérium (T)(vzoreček)
   Testové kritérium nabývá hodnot – množinu nazveme **výběrový prostor (S)**
   (všechny možné spočtené hodnoty)
   Množinu výběrového prostoru rozdělíme na dva podprostory

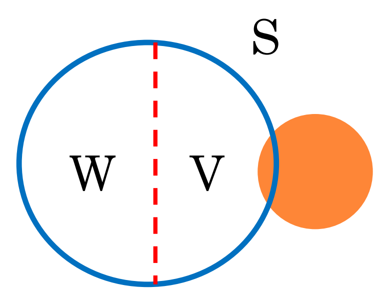
a) Podprostor (V) – obor přijetí
   Hodnoty obsažené ve (V) svedší pro přijetí H_0

b) Podprostor (W) – **kritický obor**
   Hodnoty obsažené ve (W) svědčí pro přijetí H_1

My si vypočítáme T a následně zjišťujeme kam tato hodnota patří

$U_1 \in V$ – zamítneme H_1

$U_2 \in W$ – přijmeme H_1 a zamítneme H_0



$V \cup W = S$

Kritické hodnoty - Hranice (bodů) oddělující W a V

Specifikace

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} . \sqrt{n}$$

Hypotéza H_0 má být jednoduchá – jednoznačná specifikace
(průměr je XX, rozptyl je YY, korelace existuje atd.)

Hypotéza H_1 bývá složená – dále nespecifikuje
(průměr není takový, je větší, menší než XX, ale dále již nespecifikuje)

Volba testového kritéria
Musíme znát rozdělení testového kritéria(T) při platnosti H_0!!!

Sestrojení kritického oboru (W)
Interval do kterého „spadnou“ hodnoty svědčící pro přijetí hypotézy H_1
Velikost W bude záviset na předem zvolené chybě 1 druhu

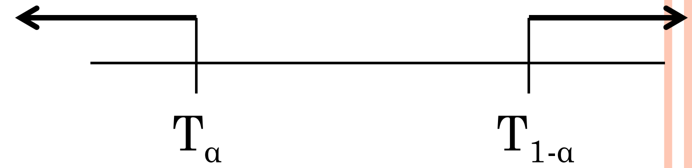
$$\alpha = P(T \in W | H_0)$$

Pravděpodobnost (1,5,10%), že výsledek z testového kritéria bude ležet ve W
Ale přesto bude platit H_0 – pamatovat to je to riziko
Jinak – na (1-α) – (99,95,90%) můžeme říci, že H_1 bude platit

Z T vyjde číslo a musíme určit – zda-li H_1 byla prokázána a nebo nebyla

Pro H_1 svědčí nízké hodnoty testového kritéria T

$$W=(T_{min}; T_{\alpha})$$



Pro H_1 svědčí vysoké hodnoty testového kritéria T

$$W=(T_{1-\alpha};T_{max})$$

Pro H_1 svědčí extrémně nízké, nebo extrémně vysoké hodnoty T

$$W=(T_{min}; T_{\alpha/2}) \cup (T_{1-\alpha/2};T_{max})$$

Co si z toho vzít:

1) Neplést si α a α/2
2) Neplést si kdy použít α a kdy 1-α

Předem zvolené (α) nám říká, jak vysoké riziko chyby 1 druhu jsme ochotni nést

Závěr testu: T

a) $T \in W$ – H_1 byla prokázána a neseme 100α% - že je výrok špatně
b) $T \in V$ – H_1 nebyla prokázána

Když navíc vyslovíme výrok, že H_0 platí vystavujeme se chybě 2 druhu

$$\beta = P(T \in V | H_1)$$

Parametrické testy

Parametrické – předpokládáme určité rozdělení základního souboru
Cílem bude vytvářet výroky o charakteristikách (parametrech rozdělení) Z.S.

Test hypotézy o průměru

Nepřeskakovat důležité – vysvětlím „omáčku“ z minula!!!

Maruška řeší průměrnou délku prstů na univerzitě
Provede náhodný výběr a sestaví hypotézy

H_0: $\mu=\mu_0$ - průměr Z.S. je roven 16,5 cm

Alternativy
H_1: $\mu\neq\mu_0$ - dvoustranná hypotéza
H_1: $\mu>\mu_0$ – pravostranná hypotéza (průměr Z.S. je větší než μ_0 – 16,5 cm)
H_1: $\mu<\mu_0$ – levostranná hypotéza (průměr Z.S. je menší než μ_0 – 16,5 cm)

Maruška musí rozlišit:

1) Rozsah výběru a zvolené testové kritérium

2a) zná rozptyl Z.S. σ^2

$$s_x^{\prime 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

2b) nezná rozptyl Z.S. a musí jej vypočítat
z hodnot pořízených z náhodného výběru $s^2_x{}'$

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} . \sqrt{n} \qquad U = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x'} . \sqrt{n} \qquad t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x'} . \sqrt{n}$$

3) Jakou bude volit formulaci alternativní hypotézy (><≠)
Z toho i volba kritického oboru

1) Maruška provede výběr o 40 chlapcích a zná rozptyl Z.S. $\sigma^2=4$
2) Zvolí si s jakou P chce hypotézu prokázat – 95% - ($\alpha=0{,}05$)
3) Spočítá výběrový průměr $x^- = 16{,}5$ – prostý aritmetický průměr
4) Maruška bude testovat hypotézu

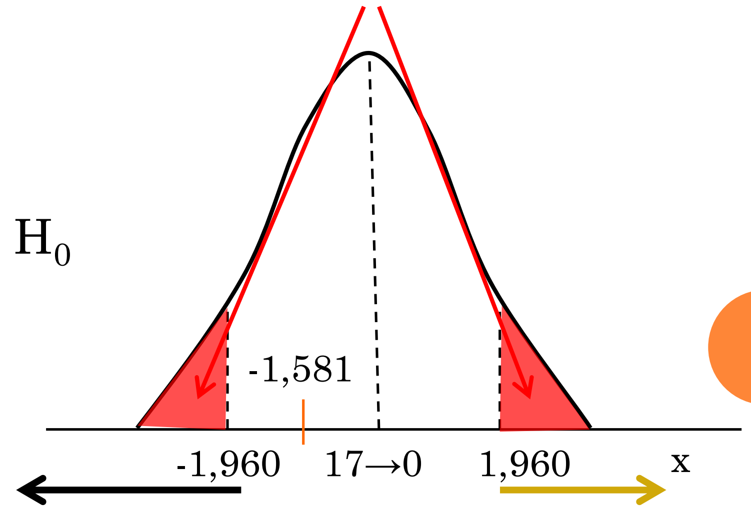
$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

H_0: $\mu=17$ cm
H_1: $\mu\neq17$ cm

Spočítá testové kritérium $U = \frac{16{,}5 - 17}{2}\sqrt{40} = -1{,}581$

Oboustranný test $W=(T_{min}; T_{\alpha/2}) \cup (T_{1-\alpha/2}; T_{max})$
NNR – hledáme v tabulkách kvantily $u_{0{,}025}$ a $u_{0{,}975}$
Známe $-u_\alpha=u_{1-\alpha}$
V tabulkách $u_{0{,}975} = 1{,}960$
Spočítám $u_{0{,}025} = -1{,}960$

Kritický obor
Když U „padne“
Zamítáme H_0
S 95% P



U neleží v kritickém oboru
U leží v oboru přijetí, nemůžeme zamítnout H_0

1) Maruška provede výběr o 40 chlapcích a zná rozptyl Z.S. $\sigma^2=4$
2) Zvolí si s jakou P chce hypotézu prokázat – 95% - ($\alpha=0{,}05$)
3) Spočítá výběrový průměr $\bar{x}$ =17,7 – prostý aritmetický průměr
4) Maruška bude testovat hypotézu

H_0: $\mu=17$ cm
H_1: $\mu>17$ cm

$$U=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}.\sqrt{n}$$

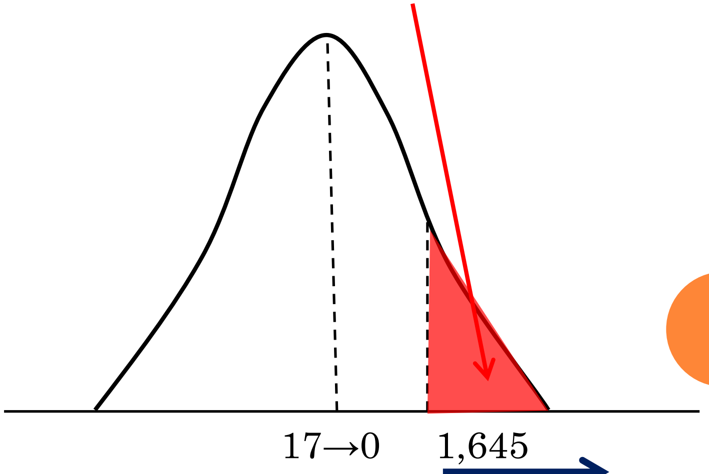
Spočítá testové kritérium

$$U=\frac{17{,}7-17}{2}.\sqrt{40}=2{,}2135$$

Jednostranná hypotéza $W=(T_{1-\alpha};T_{max})$
NNR – hledáme v tabulkách kvantil $u_{0,95}=1{,}645$

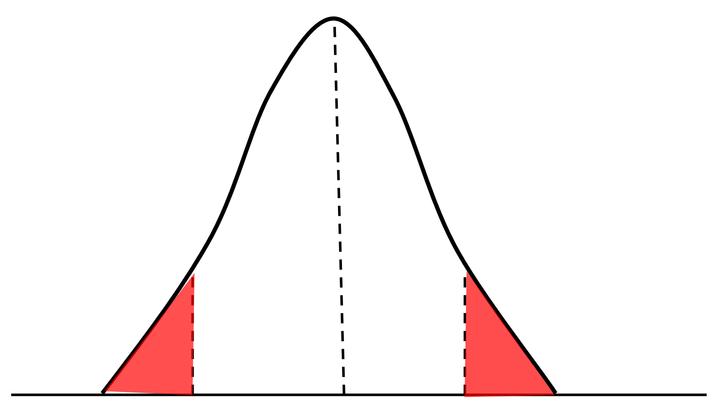
Protože je 2,2135>1,645
$T\in W$ – H_1 byla prokázána
S 95% pravděpodobností bude platit
Že průměr Z.S. bude větší než 17cm
Maruška se může radovat ☺

Kritický obor
Když U „padne"
Zamítáme H_0
S 95% P



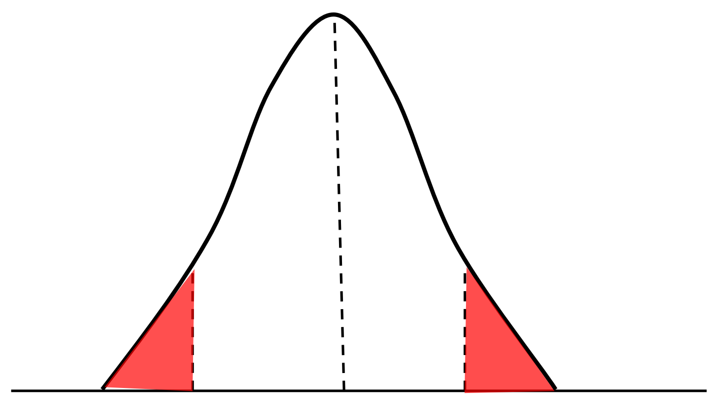
Známe rozptyl základního souboru a předpoklad při H_0 NNR

H_0	H_1	Testovací statistika	Kritický obor
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$		$T>u_{1-\alpha/2}; T<u_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}.\sqrt{n}$	$T>u_{1-\alpha}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T<-u_\alpha$



Neznáme rozptyl základního souboru a předpoklad při H_0 NNR

H_0	H_1	Testovací statistika	Kritický obor
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$		$T>u_{1-\alpha/2}; T<u_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x'}.\sqrt{n}$	$T>u_{1-\alpha}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T<-u_{\alpha}$



1) Maruška provede výběr o **20 chlapcích** a nezná rozptyl Z.S.
2) Zvolí si s jakou P chce hypotézu prokázat – 90% - (α=0,1)
3) Spočítá výběrový průměr $\bar{x}$ =16,5 – prostý aritmetický průměr
4) Spočítá výběrový rozptyl $s_x'^2$=3,9 - s_x'=1,974
4) Maruška bude testovat hypotézu

$$s_x'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x'} . \sqrt{n}$$

H_0: μ=17 cm
H_1: $\mu \neq$17 cm

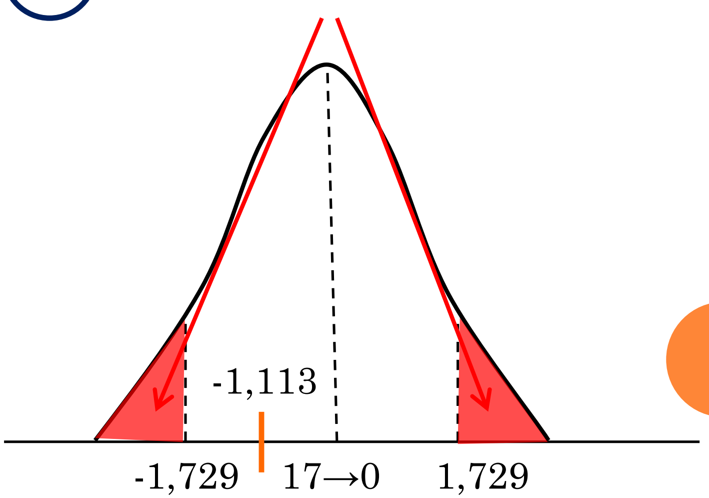
Spočítá testové kritérium

$$t = \frac{16{,}5 - 17}{1{,}974} . \sqrt{20} = -1{,}132$$

Při platnosti H_0 – **t-rozdělení**
Oboustranný test W=(T_{min}; $T_{\alpha/2}$) ∪ ($T_{1-\alpha/2}$; T_{max})
t-rozdělení – hledáme v tabulkách kvantily t_α(n-1)
Známe -t_α=$t_{1-\alpha}$
V tabulkách $t_{0,95}$(19)= 1,729
Spočítám $t_{0,05}$(19)= -1,729

Protože je -1,113>-1,729 !!!
T∈V – H_1 nebyla prokázána
S ohledem na riziko chyby 2 druhu můžeme
Přijmout H_0, že průměr je 17cm

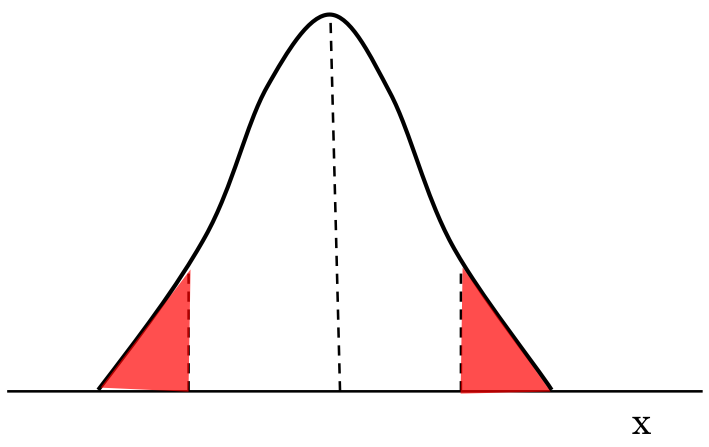
Kritický obor
Když t „padne“
Zamítáme H_0
S 90% P



Neznáme rozptyl základního souboru a předpoklad při H_0 t-rozdělení (malý výběr)

H_0	H_1	Testovací statistika	Kritický obor
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s'_x}\cdot\sqrt{n}$	$T>t_{1-\alpha}(n-1)$ $T<t_{\alpha}(n-1)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T>u_{1-\alpha}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T<-u_{\alpha}$

$$s'^2_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$



Test hypotézy o rozptylu

Maruška bude zkoumat rozptyl základního souboru (chlapci na univerzitě)
Provede náhodný výběr a sestaví hypotézy

H_0: $\sigma^2=\sigma^2_0$ - rozptyl Z.S. je 3,8cm

Alternativy
H_1: $\sigma^2\neq\sigma^2_0$ - dvoustranná hypotéza
H_1: $\sigma^2>\sigma^2_0$ – pravostranná hypotéza (rozptyl Z.S. je větší než σ^2_0 – 3,8cm)
H_1: $\sigma^2<\sigma^2_0$ – levostranná hypotéza (rozptyl Z.S. je menší než σ^2_0 – 3,8cm)

Testové kritérium: $$\chi^2 = \frac{(n-1)s_x'^2}{\sigma_0^2}$$ $$s_x'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

Statistika má při platnosti H_0 χ^2-rozdělení s **v=n-1** stupni volnosti

Kritické obory

X^2 X^2 X^2 X^2

Stejná logika jako u průměru
Kritické hodnoty opět na „okrajích“

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s_x^{\prime 2}}{\sigma_0^2}$$

X^2 X^2 X^2

Oboustranná hypotéza

$$X^2 \leq X^2_{\alpha/2}$$

Hodnota testového kritéria bude menší než daný kvantil s (n-1) stupni volnosti

Nebo

Přijmu H_1 – zamítnu H_0

Zamítnu H_1

$$X^2 \geq X^2_{1-\alpha/2}$$

Hodnota testového kritéria bude menší než daný kvantil s (n-1) stupni volnosti

Jednostranná hypotéza

$X^2 \leq X^2_{\alpha}$ $X^2 \geq X^2_{1-\alpha}$

X^2_{α}

$X^2_{1-\alpha}$

$X^2_{\alpha/2}$
$X^2_{0,1/2}$

$X^2_{1-\alpha/2}$
$X^2_{1-0,1/2}$

Test o rozptylu - při H_0 χ^2-rozdělení s (n-1) stupni volnosti

H_0	H_1	Testovací statistika	Kritický obor
$\sigma^2=\sigma^2_0$	$\sigma^2\neq\sigma^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)s_x^{\prime 2}}{\sigma_0^2}$	$T>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ $T<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma^2_0$	$\sigma^2>\sigma^2_0$		$T>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma^2_0$	$\sigma^2<\sigma^2_0$		$T<\chi^2_{\alpha}(n-1)$

$$s_x^{\prime 2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$