Průběh funkce

Monotónnost funkce

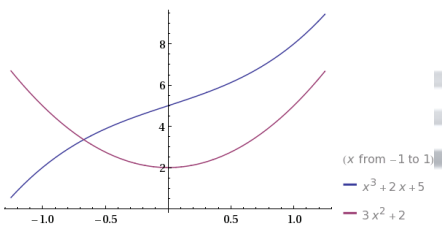
Směrnice tečny!!!
Kladná vs. Záporná

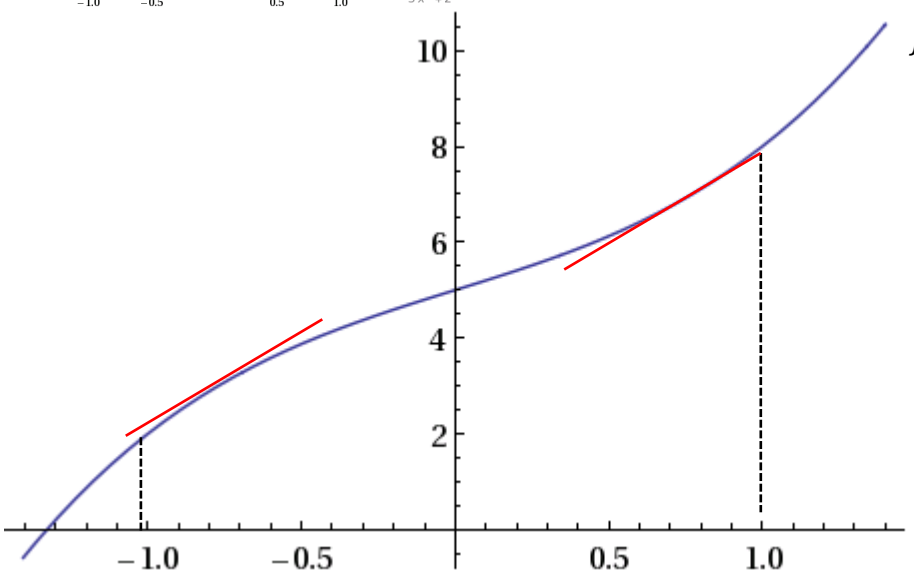
Zodpoví otázku kde funkce roste a kde klesá

Věta:
Nechť je dán interval *(a,b)* a
nechť má v každém bodě tohoto intervalu funkce *f(x)* derivaci.
Jestliže $f'(x) \gtreqless 0$ na (a, b) pak funkce $f(x)$ na (a, b) roste, resp. klesá

$f'(x) > 0$ Roste

$f'(x) < 0$ Klesá





$f(x) = x^3 + 2x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

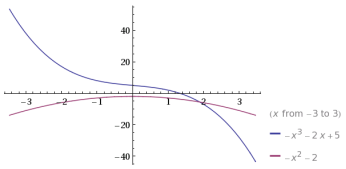
(x from −1 to 1)

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Věta:

Nechť je dán interval *(a,b)* a
nechť má v každém bodě tohoto intervalu funkce *f(x)* derivaci.
Jestliže $f'(x) \gtreqless 0$ na (a, b) pak funkce $f(x)$ na (a, b) roste, resp. klesá



$f'(x) > 0$ Roste

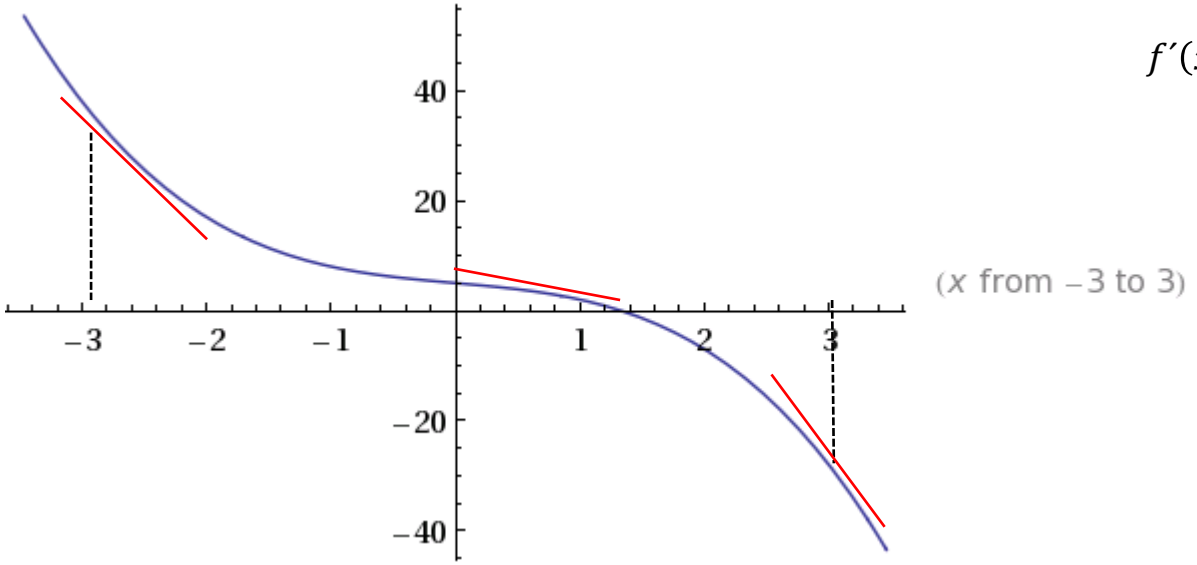
$f'(x) < 0$ Klesá

EKOFUN

$f(x) = -x^3 - 2x + 5$

$f'(x) = -3x^2 - 2$

$f'(x) = -3x^2 - 2 < 0$



Věta:
Nechť je dán interval *(a,b)* a nechť má v každém bodě tohoto intervalu funkce *f(x)* derivaci.
Jestliže $f'(x) \gtrless 0$ na (a, b) pak funkce $f(x)$ na (a, b) roste, resp. klesá

$f'(x) > 0$ Roste

$f'(x) < 0$ Klesá

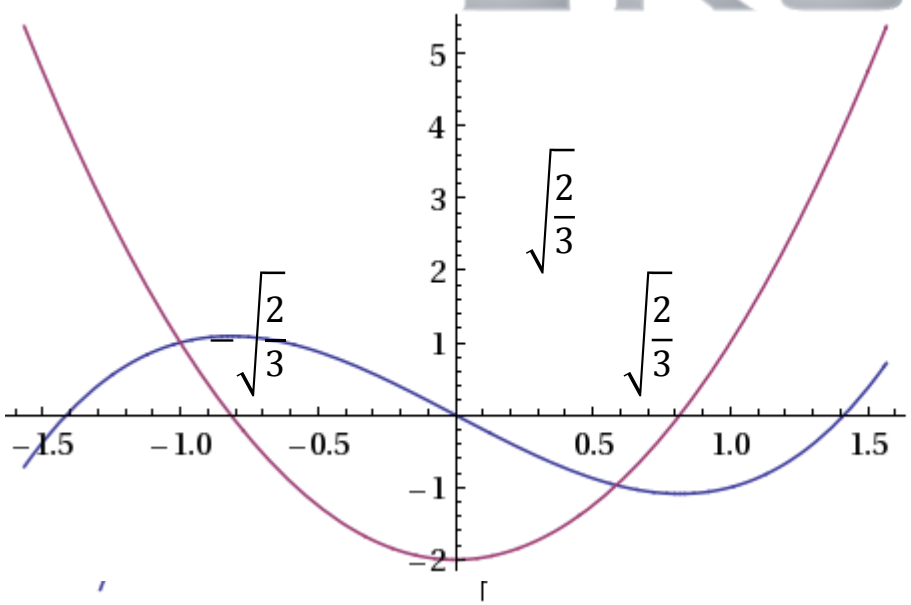
$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$$

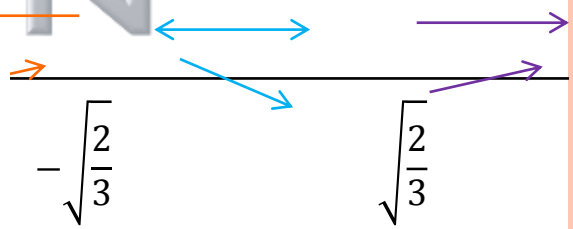
Nulové body – kořeny rovnice

$$x^2 = \frac{2}{3} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

EKOFUN

$$f(x) = x^3 - 2x$$





	$(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}>$	$(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}>$	$(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Extrém funkce

Nejvyšší/nejmenší hodnota dané funkce (funkční hodnota)
Maximum/minimum

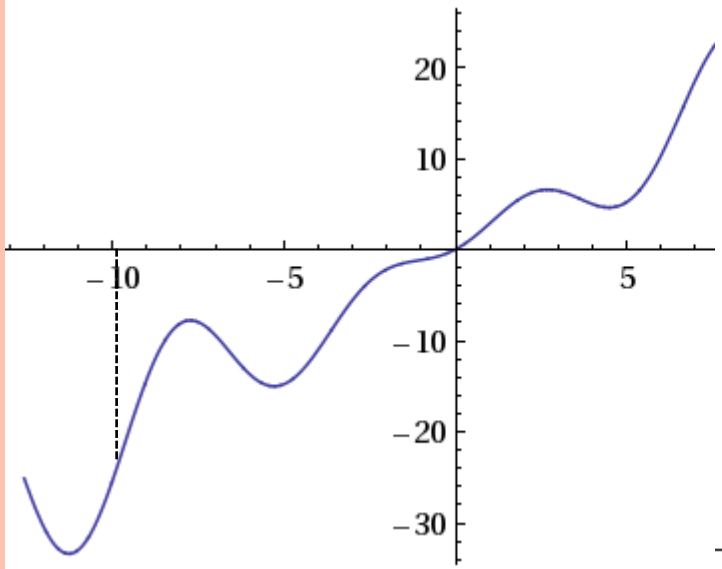
Lokální a globální extrém

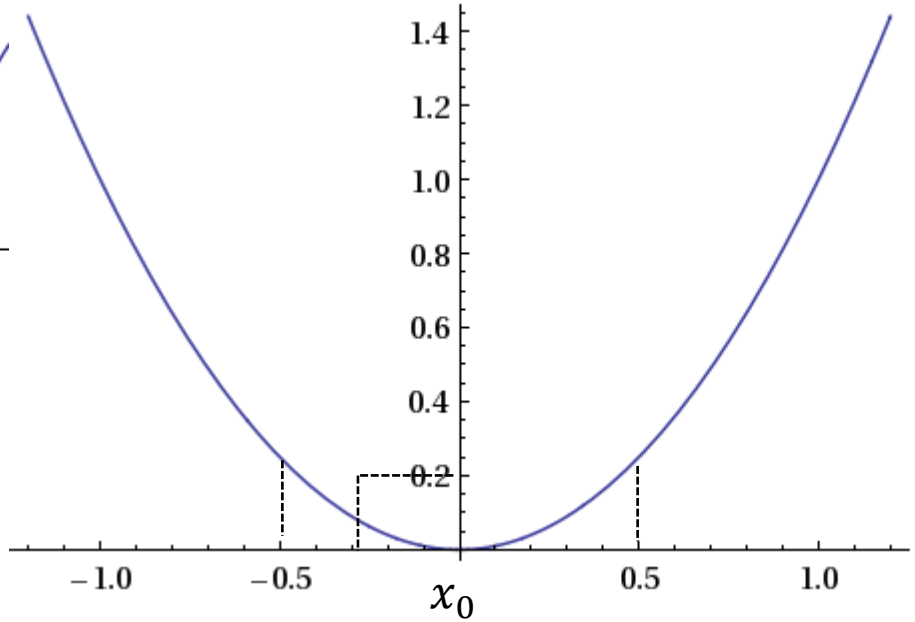
Extrém často stanovujeme pouze pro určitý interval $< a, b >$

Definice:

Funkce *f(x)* má v bodě x_0 lokální maximum, resp. Minimum
Jestliže existuje takové okolí O(x_0) bodu x_0,
Že pro každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$

EKOFUN



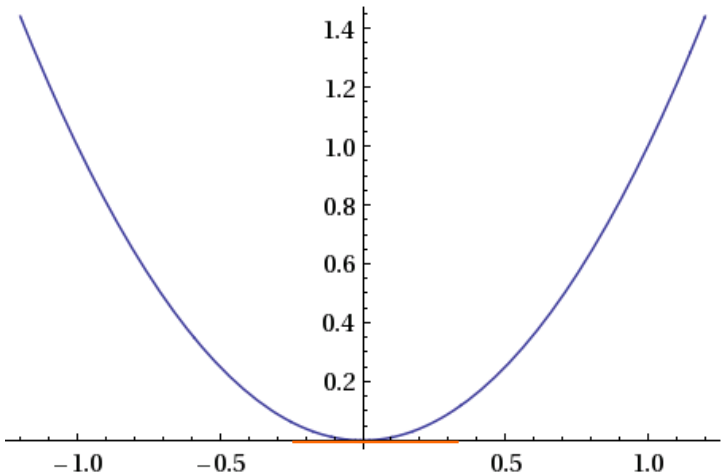


(*x* from −1 to 1)

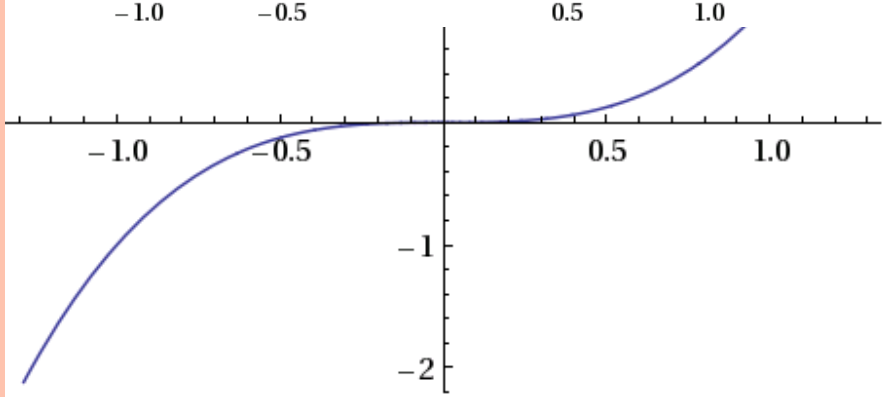
Věta:
Nechť je dána funkce *f(x)* na intervalu *(a,b)* a má v každém bodě tohoto intervalu spojitou derivaci.
Dále nechť má funkce *f(x)* v bodě $x_0 \in (a,b)$ lokální extrém,
POTÉ $f'(x_0) = 0$

Pokud má v x_0 extrém
Pak je $f'(x_0) = 0$
Ale už nemusí platit

Pokud je $f'(x_0) = 0$
Pak má v x_0 extrém!!!



$f(x) = x^3$



(x from −1 to 1)

Stacionární bod(y)
Nulové body pro *f'(x)*
Body podezřelé z extrému

Ty hledáme

$f(x) = x^3 - x \qquad f'(x) = 3x^2 - 1$

1) Určíme stacionární body – body podezřelé z extrému
2) Musíme ověřit

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$f(-0{,}57) = 0{,}3848$

$O(-0{,}57)$ $\quad f(x) = x^3 - x$

$-0{,}601; -0{,}539$

$f(0{,}57) = -0{,}3848$

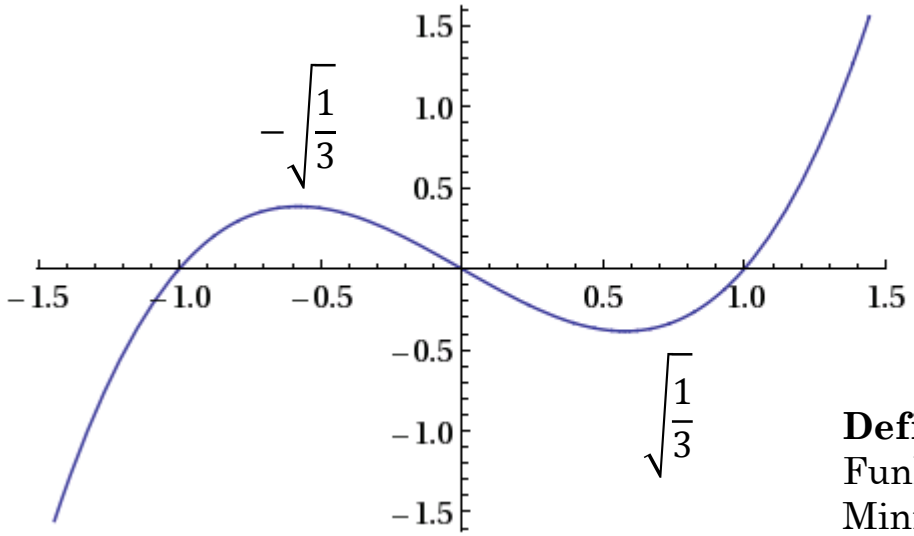
$O(0{,}57)$

$0{,}539; 0{,}601$

$f(0{,}54) = -0{,}382$ $\quad f(0{,}6) = -0{,}384$

$f(-0{,}6) = 0{,}384$ $\quad f(-0{,}54) = 0{,}382$

EKOFUN



(x from −1.5 to 1.5)

Definice:
Funkce *f(x)* má v bodě x_0 lokální maximum, resp. Minimum
Jestliže existuje takové okolí $O(x_0)$ bodu x_0,
Že pro každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$

Využití druhé derivace

Věta:

Nechť je funkce *f(x)* spojitá na intervalu *(a,b)*
A na tomto intervalu má také derivace.
Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)>0$ lokální minimum
Resp. $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)<0$ lokální maximum
Pak má funkce *f(x)* v x_0

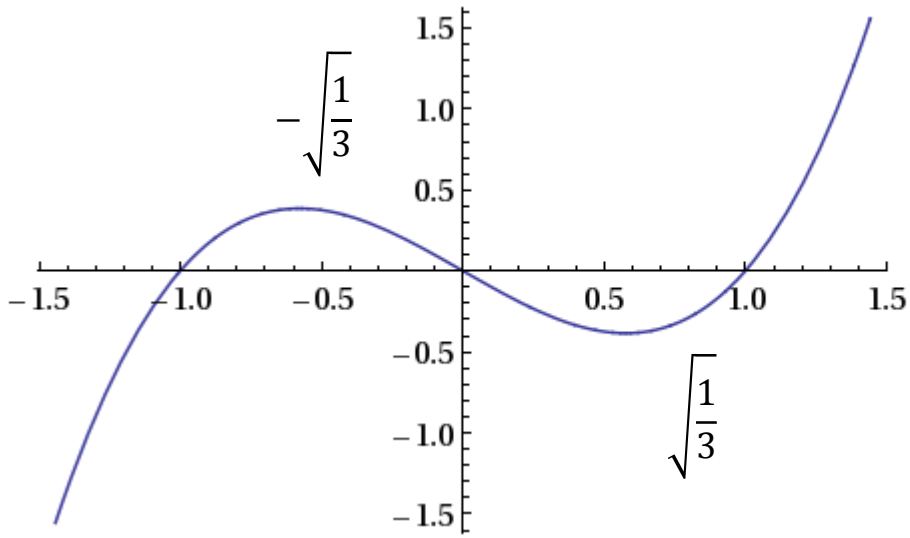
Konvexní a konkávní funkce

EKOFUN

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = 6x$$



(*x* from −1.5 to 1.5)

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0$$

Globální extrém

Extrémy hledáme na nějaké množině – zde na *D(f)*, $I \in D(f)$
Najdeme všechny lokální extrémy na *D(f)* – zjistíme funkční hodnoty
Pro konkrétní *I* najdeme:

- lokální extrémy – vnitřní body intervalu I
- krajní body I
- Vnitřní body intervalu kde neexistuje *f´(x)*

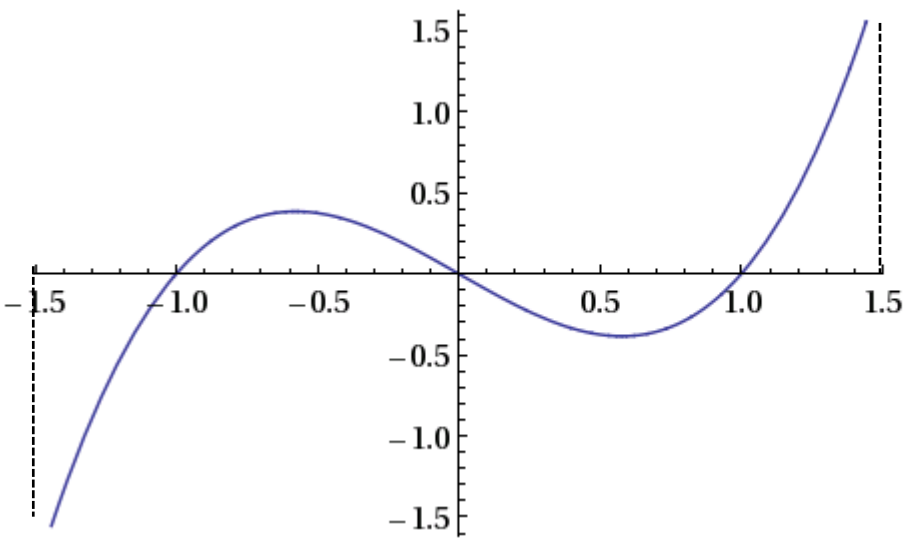
Podle funkčních hodnot určíme globální maximum/minimum

$< -1{,}5; 1{,}5 >$ $\quad f(x) = x^3 - x \quad f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$f''(x) = 6x$

$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$

$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0$



$f(-1{,}5) = -1{,}875$

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}3849$

(*x* from −1.5 to 1.5)

$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -0{,}3849$

$f(1{,}5) = 1{,}875$

Konvexní, konkávní funkce a inflexní bod(y)

Tvrzení:
Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu I.
Jestliže $f''(x_0)>0$ *konvexní*
Resp. $f''(x_0)<0$ *konkávní*
Pak v tomto intervalu I je $f(x)$

Pozor!!!
Pokud je x_0 inflexní bod, tak pak platí $f''(x_0)=0$

Ale jestli $f''(x_0)=0$
Tak x_0 nemusí být inflexním bodem
Bod podezřelý z inflexe

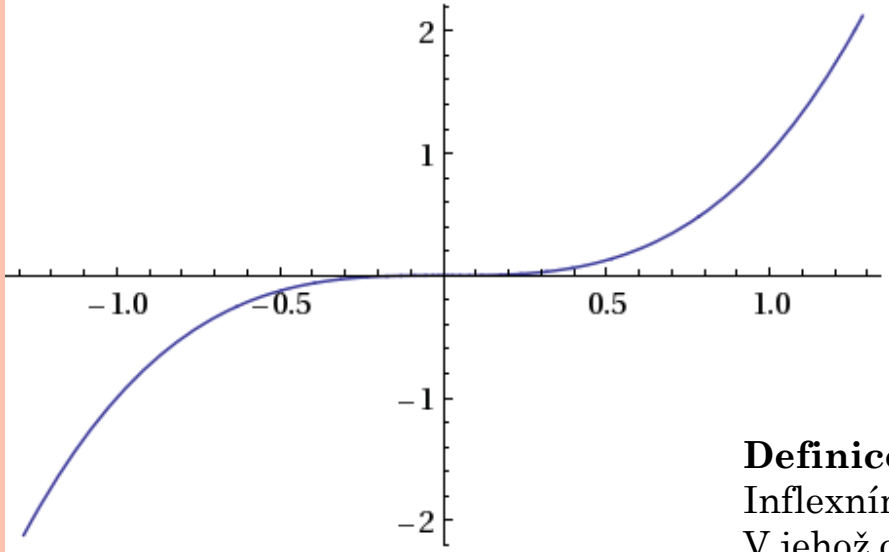
Definice:
Inflexním bodem nazveme takový bod
V jehož okolí mění funkce $f''(x)$ znaménka
Konvexní → konkávní
Konkávní → konvexní

Musí se střídat znaménka

EKOFUN

Tvrzení:
Nechť je bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$.
Jestliže existuje druhá derivace této funkce, pak platí $f''(x_0)=0$

Bod podezřelý z inflexe není stacionární bod
Stacionární body zjistíme z $f'(x_0)=0$
Body podezřelé z inflexe zjistíme z $f''(x_0)=0$



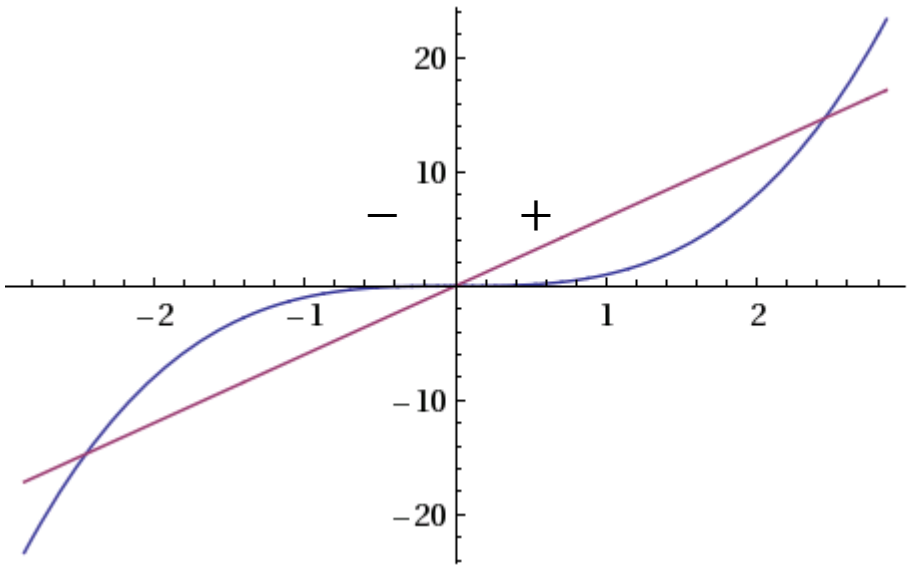
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \qquad x = 0$

$f''(x) = 6x \qquad x = 0$

(x from −1 to 1)

Definice:
Inflexním bodem nazveme takový bod
V jehož okolí mění funkce *f´´(x)* znaménka



(x from −3 to 3)

x^3

6 x

x_0 není extrém

	$(-\infty, -0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

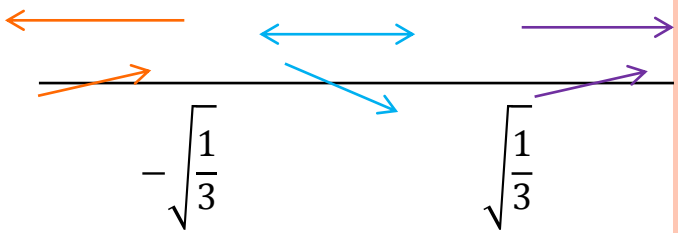
Tvrzení:

Nechť je funkce *f(x)* definována na intervalu *I*.

Jestliže $f''(x_0)>0$ *konvexní*

Resp. $f''(x_0)<0$ *konkávní*

Pak v tomto intervalu *I* je *f(x)*



$$f''(x) = 6x = 0$$

$$x = 0$$

	$(-\infty,-0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

	$(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

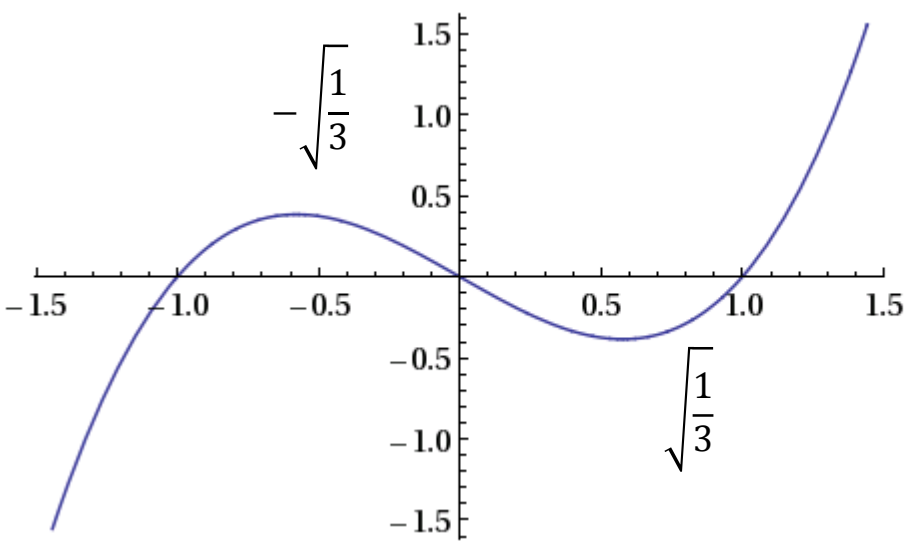
$$f(x) = x^3 - x \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0$$



EKOFUN

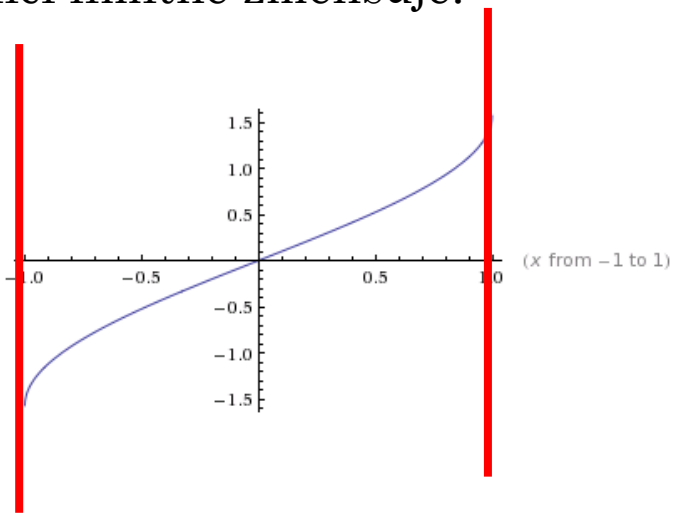
Asymptoty

Asymptota křivky je taková přímka
jejíž vzdálenost od křivky se s rostoucí souřadnicí limitně zmenšuje.

Definice:
Jestliže pro funkci *f* platí

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad nebo \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

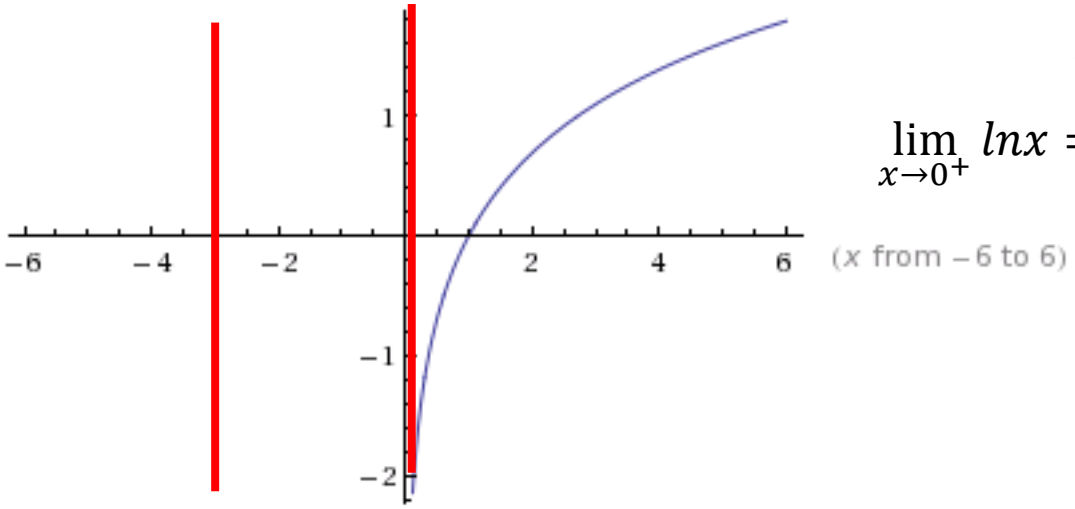
Nazýváme přímku o rovnici $x=a$
Vertikální asymptotou grafu funkce *f*



$$\lim_{x\to -1^+} \arcsin x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \arcsin x = +\infty$$

Vertikální asymptota *x=0*



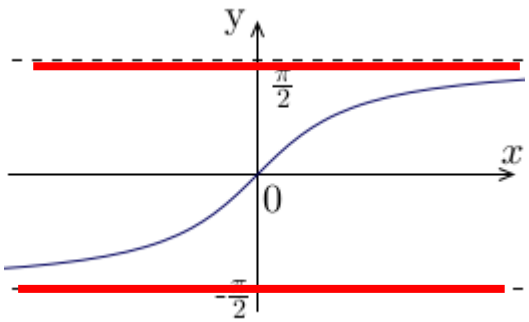
$$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$$

Definice:
Jestliže pro funkci *f* platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in R \qquad resp. \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in R$$

Nazýváme přímku o rovnici *y=b*
Horizontální asymptotou grafu funkce *f* v $+\infty$, resp. $-\infty$

EKOFUN



$$\lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$$

Definice:

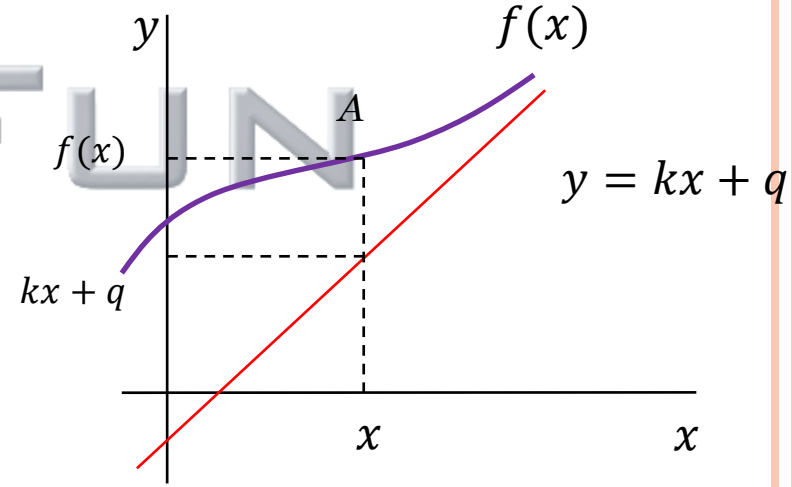
Přímka o rovnici $y = kx + q$

je (obecnou) asymptotou grafu funkce *f* v bodě +∞ jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - q] = 0$$

tzn. pro $x \to +\infty$ konverguje vzdálenost bodu *A=[x,f(x)]* grafu funkce *f*

Od bodu *[x,kx+q]* k nule (pro - ∞ analogicky)



EKOFUN

Věta:

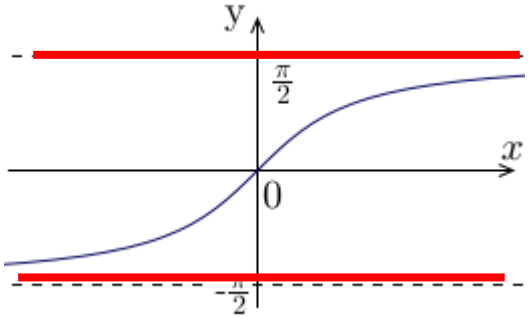
Jestliže je přímka o rovnici $y = kx + q$

Asymptotou grafu funkce *f* v bodě +∞, pak

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$$

Obráceně, jsou-li obě limity konečné

Je přímka $y = kx + q$ asymptotou grafu funkce *f* (analogicky pro -∞)



$$\lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$$

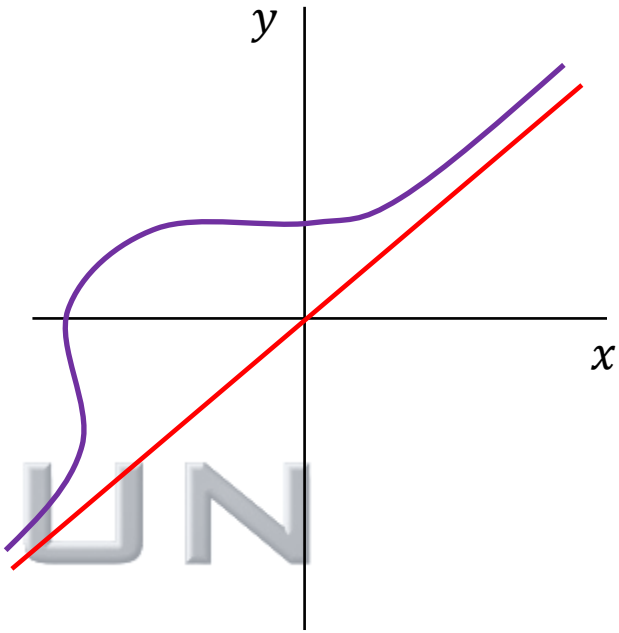
$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\, x}{x} = 0 = k$$

$$\lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 2} \qquad D(f) = R$$



Hledáme asymptoty v bodech ±∞

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2}{x^3}} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2} - 1x\right] = 0$$

EKOFUN

$$y = kx + q$$

$$y = x$$

~~Vertikální~~

$$\cancel{\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty}$$

~~Horizontální~~

$$\cancel{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2} = -\infty}$$

Věta:
Jestliže je přímka o rovnici $y = kx + q$
Asymptotou grafu funkce f v bodě $+\infty$, pak

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

Obráceně, jsou-li obě limity konečné
Je přímka $y = kx + q$ asymptotou grafu funkce f (analogicky pro -∞)