Náhodná veličina

Náhodná veličina

Provedeme náhodný pokus (vybereme nějaké lidi, výrobky)
A jejich výsledkem je nějaké reálné číslo (počet VŠ, počet vadných výrobků)
Když je možné přiřadit číslo – můžeme zavést funkci
Funkce se pak nazývá náhodná veličina

Počet vadných výrobků, počet blbců na přednášce, velikost poprsí slečen v aule
Náhodnou veličinu značíme X_1,X_2 (velikost poprsí slečen v aule)
Konkrétní realizace x_1,x_2 – poprsí A,B,C – čísla (1,2,3, atd. ☺)

Výběrový prostor (M)
Množina možných hodnot náhodné veličiny X
Výběrový prostor pro poprsí je (1-7 asi) M={x;x=1,2,3,4,5,6,7}
Výběrový prostor pro poprsí v cm od 75-120cm

Podle typu ***výběrového prostoru*** rozlišujeme dva základní druhy NV
Diskrétní (nespojitou) náhodnou veličinu
Spojitou náhodnou veličinu

Diskrétní (nespojitá) náhodná veličina
Může nabývat pouze konečně nebo spočetně nekonečně mnoha hodnot

Spojitá náhodná veličina
Může nabývat všech hodnot z určitého konečného nebo nekonečného intervalu
(1;8) nebo (-∞;∞)

Rozdělení náhodné veličiny

Známe náhodnou veličinu (velikost poprsí)
Známe i výběrový prostor (M) (1,2…7)
Ale pro úplné poznání – třeba znát pravděpodobnosti možných hodnot (3%slečen má 7-ky, 30% 2-ky atd.)
Pokud známe uvedený vztah – je dán **zákon rozdělení náhodné veličiny**

Pravidlo, které každé hodnotě z výběrového prostoru
Přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty (hodnoty z určitého intervalu)

Nejjednodušší možnost zadání zákona rozdělení nespojité náhodné veličiny:
Řada rozdělení – každé hodnotě z VP přiřazuje pravděpodobnost

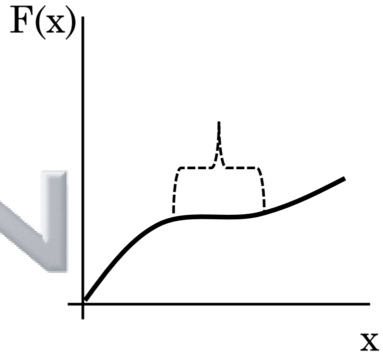
$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_1}$	**…**	$\mathbf{x_n}$	**Σ**
$P(x_i)$	$P(x_1)$	…	$P(x_n)$	1

$\mathbf{x_i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Σ**
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

Distribuční funkce

Další možnost (základní) pro popis zákona rozdělení náhodné veličiny
Distribuční funkce F(x) – říká, s jakou pravděpodobností nabude NV
Hodnoty menší-rovna než zvolené x

$$\mathbf{F(x)=P(X \leq x)}$$



X – velikost poprsí
x – konkrétní hodnota (3-ky)

$$F(3)=P(X_{poprsí} \leq 3)$$

Základní vlastnosti:

$0 \leq F(x) \leq 1$ pro každé x

F(x) je neklesající funkcí – když $x_1 < x_2$, musí platit, že $F(x_1) \leq F(x_2)$

Jestliže výběrový prostor náhodné veličiny X patří do intervalu (a,b) Mx(a,b)
Pak F(a)=0, F(b)=1 – Obecně $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$

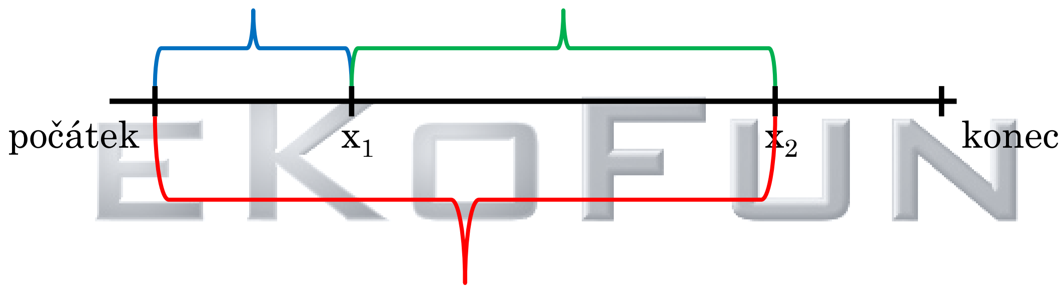
Graf distribuční funkce odpovídá grafu kumulativních četností

Důležité odvození

To že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovno x_2, lze zapsat:

$$P(X \le x_2) = P(X \le x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$$

$F(x)=P(X\le x)$



$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \le x_2)$$

Extrémně důležité

Při složitějších tvarech distribučních funkcí

Pravděpodobnost, že náhodná veličina leží v určitém intervalu

Najdu v tabulkách hodnoty F(x) pro daný interval a mám pravděpodobnost

Pravděpodobnostní funkce

Další možnost pro popis zákona rozdělení NESPOJITÉ náhodné veličiny

$$\mathbf{P(x)=P(X=x)}$$

Každému x(konkrétní velikost poprsí) přiřazuje pravděpodobnost
Že náhodná veličina X(velikost poprsí obecně) nabude této konkrétní hodnoty

Náhodně vyberu jednu slečnu v aule a mám 20% šanci, že bude mít 3-ky

$$\sum \mathbf{P(x)=1}$$

Díky pravděpodobností funkci můžeme určit pravděpodobnost, že NV nabude hodnoty v konkrétním intervalu $(x_1;x_2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_1}^{x_2} P(x)$$

Kuba rád prsíčka a je indiferentní mezi velikosti 5-7
S jakou pravděpodobností při náhodném výběru v aule, najde takovou slečnu?

$$P(5 \leq X \leq 7) = \sum_{5}^{7} P(x)$$

$$=0{,}07+0{,}05+0{,}03=0{,}15$$

Kuba při náhodném výběru má 15% šanci, že si najde vysněnou slečnu
Pozor na znaménko větší-rovno – znamená, že daná hodnota patří do intervalu

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_1}^{x_2} P(x)$$

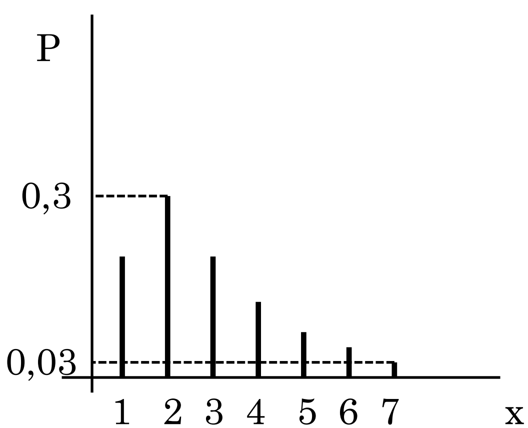
x_i	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

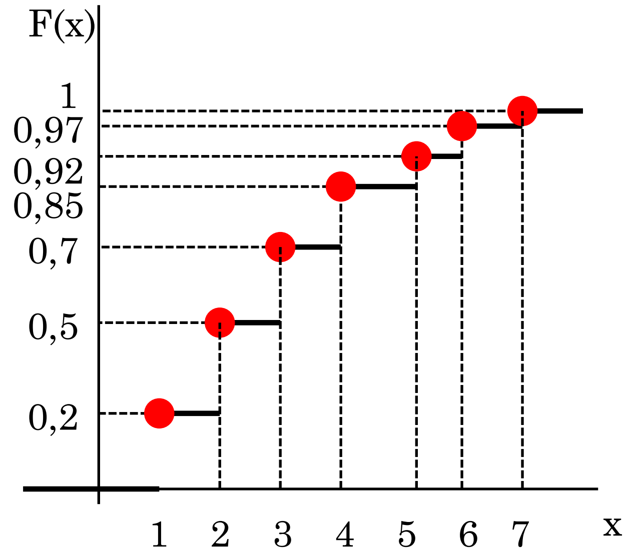
Zobrazení distribuční a pravděpodobností funkce pro diskrétní NV

Pravděpodobnostní rozdělení DISKRÉTNÍ NV
Najdeme všechny možné hodnoty (velikost poprsí) a zjistíme pravděpodobnosti

Můžeme sestrojit pravděpodobnostní i distribuční funkci
Graf distribuční funkce odpovídá grafu kumulativních četností

$P(x)=P(X=x)$





$F(x) = 0$ pro $x<1$
$0{,}2$ pro $1 \le x<2$
$0{,}5$ pro $2 \le x<3$
$0{,}7$ pro $3 \le x<4$
$0{,}85$ pro $4 \le x<5$
$0{,}92$ pro $5 \le x<6$
$0{,}97$ pro $6 \le x<7$
1 pro $x \ge 7$
$P(X \le 10)=1$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

Pravděpodobnostní funkce

P(1)=0,2
P(2)=0,3
P(3)=0,2
P(4)=0,15
P(5)=0,07
P(6)=0,05
P(7)=0,03

Pro spojitou NV
Nelze určit pravděpodobností funkci

P(x)=P(X=x)

Distribuční funkce

F(0)=0
F(1)=0,2 $P(X\leq 1)$
F(2)=0,5 $P(X\leq 2)$
F(3)=0,7 $P(X\leq 3)$
F(4)=0,85 $P(X\leq 4)$
F(5)=0,92 $P(X\leq 5)$
F(6)=0,97 $P(X\leq 6)$
F(7)=1 $P(X\leq 7)$
F(10)=1 $P(X\leq 10)$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	∑
$P(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,07	0,05	0,03	1

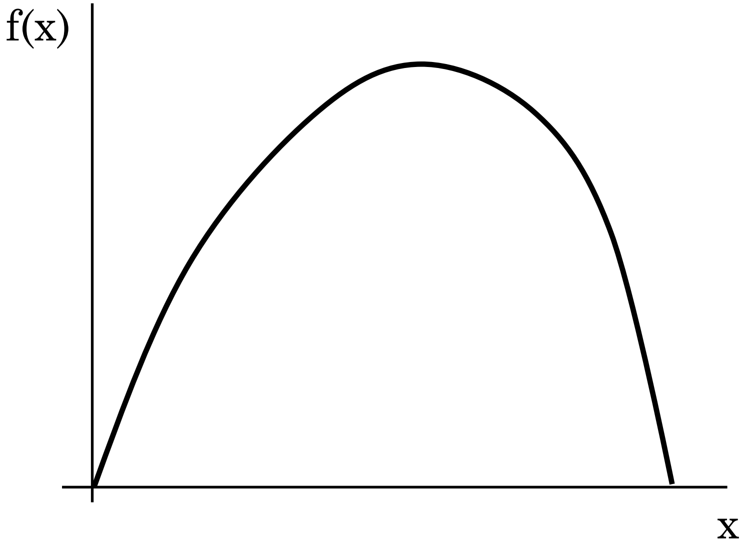
Distribuční funkce a spojitá náhodná veličina

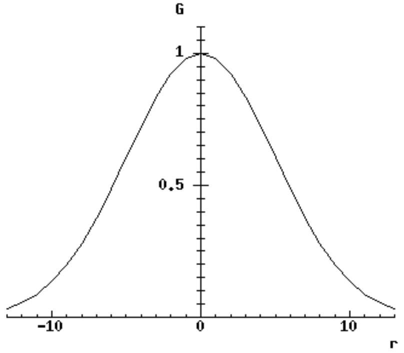
Náhodná veličina může v daném intervalu nabývat libovolný počet hodnot
Nelze přiřadit jednotlivé veličině pravděpodobnost
ALE lze přiřadit pravděpodobnost libovolně malému intervalu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Kde f(t) je hustota pravděpodobnosti a platí, že:
Hustota pravděpodobnosti není pravděpodobnost toho, že X má hodnotu x
Může být větší než 1! Ale pomůže nám k výpočtu F(x)





Vlastnosti distribuční funkce

$f(x) \geq 0$

Pro $-\infty < x < \infty$ platí $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Jaká je pravděpodobnost, že NV padne do intervalu (0;5)?
1!!

$$\int_{0}^{5} f(x)dx = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\downarrow$$

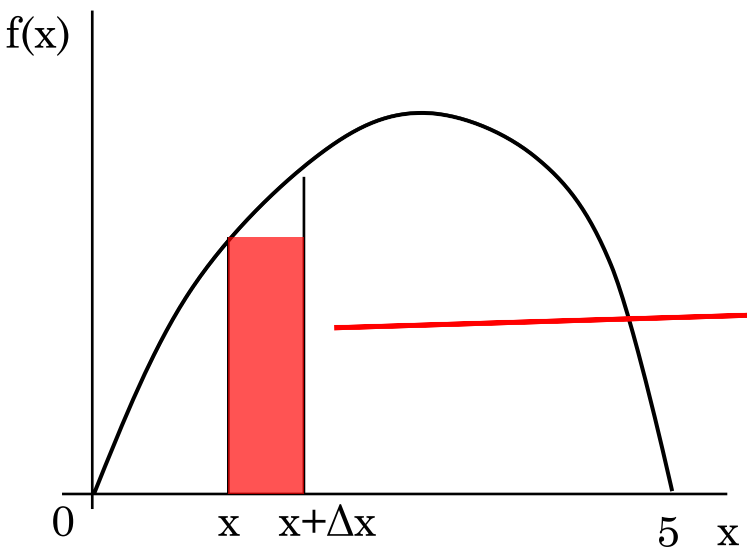
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\downarrow$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\downarrow$$

$$P(x < X < x+\Delta x) = f(x).\Delta x$$



Pravděpodobnost, že NV padne do intervalu (x;x+Δx) je dána červenou plochou

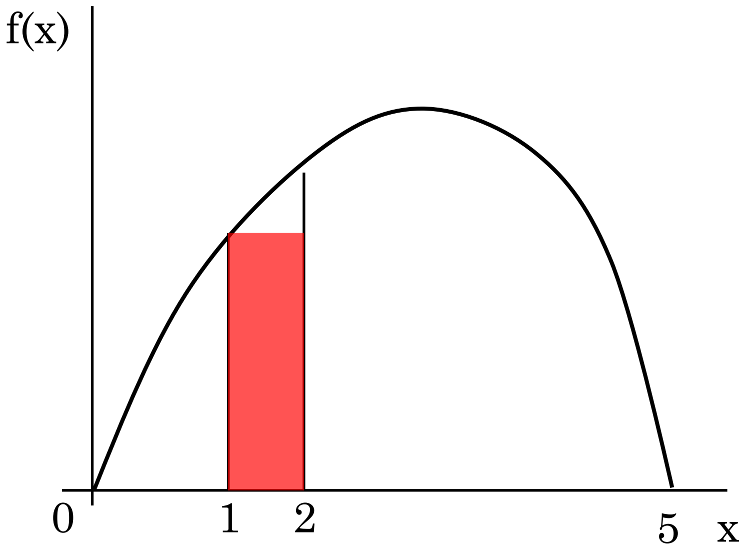
Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina bude ležet v intervalu (1;2) ?
Jsme u spojité NV proto P(X=a)=0, nemusíme rozlišovat:

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \le x_2)$$

$$P(1 \le X < 2) = \int_1^2 f(t)\,dt$$



Známe hustotu pravděpodobnosti :f(x)=1/4.x$^{1/2}$

Dále víme, že náhodná veličina může nabývat hodnot pouze (0;4)

a) P(X>1) ?

b) Jak vypadá F(x) ?

$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \int_0^1 \frac{1}{4.\sqrt{x}} dx$$

$$= 1 - \frac{1}{4}.\left[2.\sqrt{x}\right]_0^1 = 0{,}5$$

$$P(1 < X < 4) = \int_1^4 \frac{1}{4.\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4}.\left[2.\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{1}{4}.(4-2) = 0{,}5$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{4.\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{4}.\left[2.\sqrt{x}\right]_0^x = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1)$$